9.nov 2018

Geometriske følger

Fausel

$a_{n+1} = k \cdot a_n$ for alle n

(1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = k$ "kvotienten"

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

a_1 a_2 ...

$k = 2$

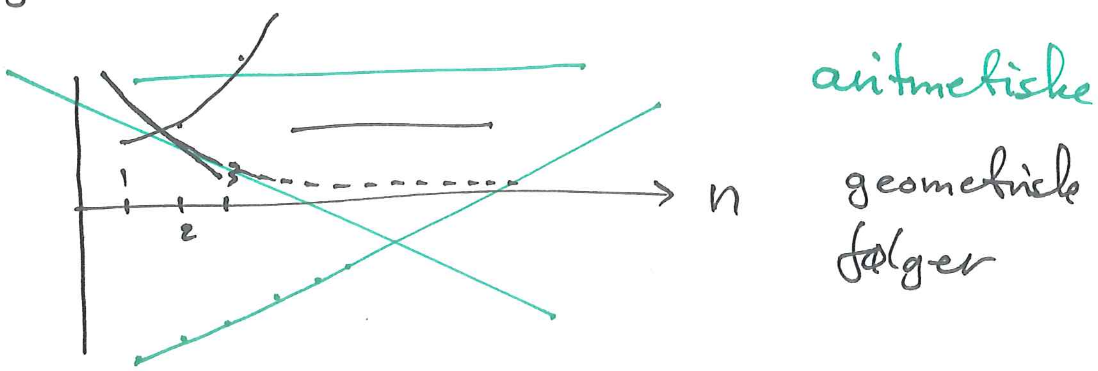
$a_1 = 1$

$a_n = 2^{n-1}$

En geometrisk følge med kvotient k

$a_n = k^{n-1} \cdot a_1$

Hvilke følger er både aritmetiske og geometriske?



Av følgene med mer enn to ledd er det bare konstante følger som er både aritmetiske og geometriske.

(2) Kan følgende følger være geometriske?

$2, -4, 8, \ldots$ ja mulig med $k = -2$

$2, 4, 6, \ldots$ nei $\frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3$

$\frac{a_3}{a_2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

ikke geometrisk

Finnes det en reell tallfølge slik at $a_4 = 5$ og $a_6 = -8$? Ikke mulig!

$a_5 = k \cdot a_4$ og $a_6 = k \cdot a_5 = k^2 \cdot a_4$

$-8 = k^2 \cdot 5$

$k^2 = \frac{-8}{5}$

ingen reell løsning.

Finn alle geometriske følger slik at

$a_4 = 1$ og $a_6 = 4$.

$4 = k^2 \cdot 1 = k^2$

$k = +2$ eller -2

$k = 2$

$a_n = 2^{n-4} \quad (= 2^{-3} \cdot 2^{n-1})$

så $a_1 = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

to muligheter

$k = -2$

$a_n = (-2)^{n-4}$ $a_1 = \frac{-1}{8}$

oppgave : Bestem a_1 og generelt a_n

3 hvis $a_5 = 1$ og $a_8 = -27$

$$k^3 a_5 = a_8$$
$$k^3 = -27$$
$$k = \sqrt[3]{-27} = -3$$

$$a_n = (-3)^{n-5} = (-3)^n \cdot \left(\frac{-1}{3^5}\right)$$

$$a_1 = (-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{((-3)^2)^2} = \frac{1}{9^2} = \underline{\frac{1}{81}}$$

$\frac{1}{81}, \frac{-1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{-1}{3}, 1, -3, 9, -27, \ldots$

En geometrisk rekke er rekken tilordnet er geometrisk følge

4

$$a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + a_1 k^3 + \cdots \quad a_1 k^{n-1}$$

n-te ledd

$$= a_1 (1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1})$$

Resultat: $1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-k^n}{1-k} & k \neq 1 \\ n & k = 1 \end{cases}$

$k = 2$ $\quad 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{1-2^n}{1-2}$

$$= \underline{2^n - 1}$$

Vi viser resultatet:

$$S_n = S_n(k) = 1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1}$$

$$k \cdot S_n = k \cdot 1 + k \cdot k + k \cdot k^2 + \cdots + k \cdot k^{n-1}$$

$$= k + k^2 + k^3 + \cdots + k^{n-1} + k^n$$

$$S_n - k S_n = 1 + (k - k) + (k^2 - k^2) + \cdots + (k^{n-1} - k^{n-1}) - k^n$$

$$(1 - k) S_n = 1 - k^n$$

Hvis $k \neq 1$: $\underline{S_n = \frac{1-k^n}{1-k}} = \frac{k^n - 1}{k - 1}$

5

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} & x \neq 1 \\ n+1 & x = 1 \end{cases}$$

$$1 + 5 + 25 + 125 + \cdots + 5^n = \frac{5^{n+1}-1}{5-1}$$

$$= \underline{\frac{1}{4}\left(5^{n+1}-1\right)}$$

$$1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$$

$$1 + (x^2)^1 + (x^2)^2 + \cdots + (x^2)^n$$

(kvotienten er $k = x^2$)

$$= \frac{(x^2)^{n+1}-1}{x^2-1} = \underline{\frac{x^{2n+2}-1}{x^2-1}}$$

Finn summen til

$$3 - 6 + 12 - 24 + - \cdots + \overbrace{3072}^{3 \cdot 1024 = 3 \cdot 2^{10}}$$

kvotienten er -2

$$3\left(1 + (-2) + (-2)^2 + \cdots + (-2)^{10}\right)$$

$$= 3 \cdot \frac{(-2)^{10+1}-1}{-2-1} = 3\,\frac{(-2)^{11}-1}{-3}$$

$$= -\left(-(2^{11})-1\right) = 2^{11}+1 = \underline{2049}$$

Uendelige geometriske rekker

$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

konvergerer når $|x| < 1$

Summen er da lik $\underline{\underline{\dfrac{1}{1-x}}}$

divergerer når $|x| \geq 1$

n-te delsum er $S_n = 1 + x + \dots + x^{n-1}$

$$= \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

x^{n+1} går mot 0 når n går mot ∞

hvis $|x| < 1$.

så S_n konvergerer til $\frac{1}{1-x}$ når $|x|<1$

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$ divergerer.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ konvergerer

Summen er: $\dfrac{1}{1 - 1/2} = 2$

$1 + 0.99 + (0.99)^2 + \dots$ konvergerer

Summen er

$$\frac{1}{1 - 0.99} = \frac{1}{0.01} = \underline{\underline{100}}$$

7 $\quad x^5 + \frac{x^8}{2} + \frac{x^{11}}{4} + \cdots$ geometrisk rekke

når konvergerer rekken?

Kvotienten er $\frac{x^8/2}{x^5} = \frac{x^3}{2}$.

Rekken konvergerer for $\left|\frac{x^3}{2}\right| < 1$

$|x|^3 < 2$

$\underline{|x| < \sqrt[3]{2}}$

Summen er da:

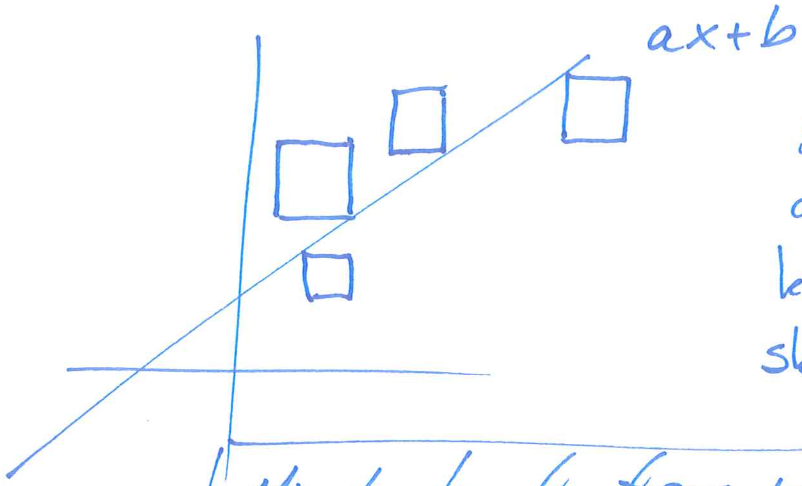
$x^5\left(1 + \left(\frac{x^3}{2}\right) + \left(\frac{x^3}{2}\right)^2 + \cdots\right)$

$= x^5 \frac{1}{1 - x^3/2} = \underline{\underline{\frac{2x^5}{2 - x^3}}}$

Punkt (x_i, y_i) $\quad i=1,\dots,n$

Finn a og b slik at

$$D=\sum_{i=1}^{n} \left(y_i-(ax_i+b)\right)^2$$ er minst mulig



Summen av arealene til kvadratene skal være minst mulig.

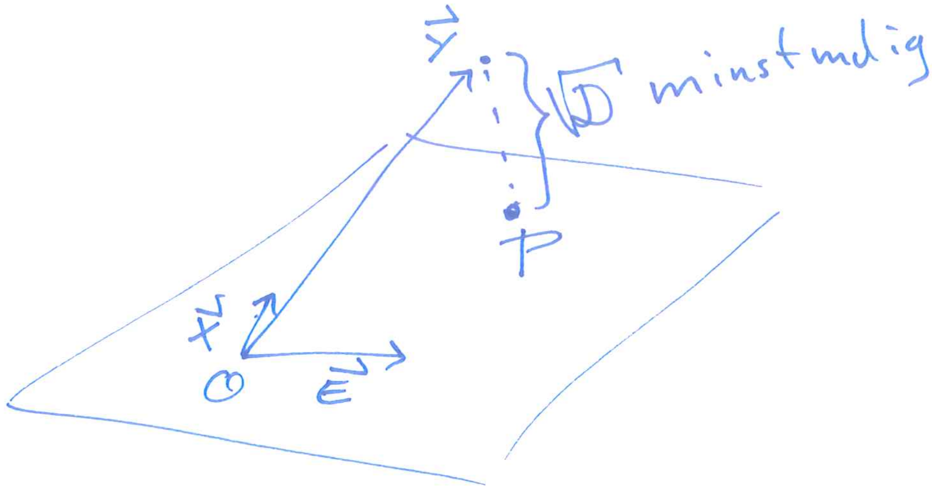
Minste kvadraters metode

$\vec{Y}=[y_1,\dots,y_n]$ $\quad \vec{X}=[x_1,\dots,x_n]$

La $\vec{E}=[1,1,\dots,1]$.

$$D=\|\vec{Y}-(a\vec{X}+b\vec{E})\|^2$$

$a\vec{X}+b\vec{E}$ parametrisert 2-plan i $\mathbb{R}^n$ (gjennom origo)



D er minst mulig for punktet P i planet slik at $\overrightarrow{YP}$ står vinkelrett på planet :

$$\left(\overrightarrow{PY} = \vec{d} = \vec{y} - (a\vec{x} + b\vec{E})\right)$$

$$\vec{d}\cdot\vec{x} = 0 \qquad \text{og} \qquad \vec{d}\cdot\vec{E} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} (a\vec{x} + b\vec{E})\cdot\vec{x} &= \vec{y}\cdot\vec{x} \\ (a\vec{x} + b\vec{E})\cdot\vec{E} &= \vec{y}\cdot\vec{E} \end{aligned}\right\} \text{to likninger}$$

$$a|\vec{x}|^2 + b\left(\sum^n x_i\right) = \vec{y}\cdot\vec{x}$$

$$a\left(\sum^n x_i\right) + b\cdot n = \sum^n y_i$$

Løsningene a, b gir linjen som er nermest punktene. i betydning $|\vec{d}|$ er minst mulig.

sjekk gjerne geogebra under uke 44.