17 Følger og rekker

1

En tallfølge er en ordnet mengde tall

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ endelig følge

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ vendelig følge

eks $1, 3, 5, 7$ 4 første positive oddetall

første ledd, tredje ledd

$5, 3, 7, 1$ en annen følge.

$1, 2, 3, 4, \dots$ de naturlige tall ordna etter rekkefølge er en vendelig følge

Vi behøver ikke starte med a_1

første ledd

$a_0, a_1, \dots, a_n$ ledd nr. $n+1$

$a_3, a_4, \dots, a_n$ ledd nr. $n-2$

Følger kan og skrives som $\{a_n\}$

$\{a_n\}_{n=1}^{n=7}$

slutter

starter

(2) $\{2^n\}_{n=0}^{8}$ er følgen

Rekursiv beskrivelse
$a_n = 2 \cdot a_{n-1}, \quad a_0 = 1$

$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$

oddetall ≥ 1

$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots$

$a_n = +2n - 1$

Rekursiv beskrivelse
$a_n = a_{n-1} + 2$
og $a_1 = 1$

Følgen av primtall

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$

uendelig følge

Ingen kjent formel for primtall nr n.

En tallfølge er gitt rekursivt hvis ledd n er bestemt av foregående ledd

Eksempel $\quad X_0 = 1$

$$X_{n+1} = X_0 + X_1 + \cdots + X_n$$

$X_0 = 1, \quad X_1 = X_0 = 1, \quad X_2 = (X_0 + X_1) = 2$

$X_3 = (\underbrace{X_0 + X_1}_{X_2} + X_2) = 2X_2 = 4, \quad X_4 = \underbrace{X_0 + X_1 + X_2}_{X_3} + X_3 = 2X_3 = 8$

$X_5 = (\underbrace{X_0 + X_1 + X_2 + X_3}_{X_4}) + X_4 = 2X_4 = 16, \ldots$

$$X_n = \begin{cases} 2^{n-1} & n \geq 1 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

Fibonacci følgen

(3) $F_0 = 0 \ , \ F_1 = 1$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad n \geq 0$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Det er en formel for F_n

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{\varphi^n} - \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n} \right]$$

hvor $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$ er det gylne snitt.

(φ "fi" phi gresk tilsvarende lat. f)

Se eget notat: Fibonacci tall

4

En tallfølge $a_1, a_2, \ldots$ konvergerer til a (alternativt: konvergerer og har grense a) hvis a_n nermer seg a når n går mot uendelig.

$a_n = \frac{1}{n}$ $n \geq 1$ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

konvergerer til 0

$b_n = 3$ $n \geq 1$ $3, 3, 3, 3, 3, \ldots$

konvergerer og har grense lik 3.

Hvis en følge ikke konvergere sier vi at den divergerer

$c_n = (-1)^n$ $n \geq 1$ $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

divergerer

$r_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ konvergerer (vist på tavlen)

I geogebra forsøk gjerne sequence(n^2, n, 1, 5)

speadsheat: A1 = 0, A1 = 1

A2 = A0 + A1

Dra uten nedover kolonnen for å få Fibonacci tallene

(5) Rekken tilordnet følgen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$
er $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

summen til rekken er verdien til summen når det gir mening.

Følge $1, 2, 3, 4, 5$
Tilhørende rekke $1+2+3+4+5$
summen til rekken er 15

Følge $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ $(a_n = 2^n \quad n \geq 0)$
Tilhørende rekke $1+2+4+8+16+\cdots$
Rekken har ingen sum.

Følge $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$ $a_n = \frac{1}{n^2}$
Tilhørende rekke $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$
Rekken har en sum. Den er $\frac{\pi^2}{6}$

Harmonisk rekke $\left(a_n = \frac{1}{n}\right)$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$
leddene konvergerer til 0.
Rekken har ingen sum
Den divergerer

Summenotasjon

⑥

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

(Σ stor sigma
gresk for lat. S)

$$a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

eks

$$\sum_{i=2}^{5} a_{3i-1} = a_5 + a_8 + a_{11} + a_{14}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100 = \sum_{i=1}^{100} i$$
$$= 5050 \quad \text{(geogebra)}$$

Resultat $\sum_{i=1}^{n} = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$n = 100$ gir $\frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$ ✓

Legger sammen to kopier av $S_n = \sum_{i=1}^{n} i$

$$\begin{aligned} S_n + S_n = \; & 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n \\ + \; & n + n-1 + n-2 + n-3 + \cdots + 2 + 1 \\ = \; & (n+1) + (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) \end{aligned}$$

$$2S_n = n(n+1)$$

Derfor er $\underline{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$

Konvergens av rekker

7 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ rekke

n-te delsum $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n$

Følgen av delsummer er

$S_1, S_2, S_3, \ldots$

Rekken $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergerer og har sum (grense) lik S hvis følgen av delsumme $\{S_n\}$ konvergerer til S.

eks $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

n-te delsum $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Følgen av delsummer nermer seg 1

så $a_1 + a_2 + \cdots$ konvergerer og har sum 1.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \cdots = 1$$