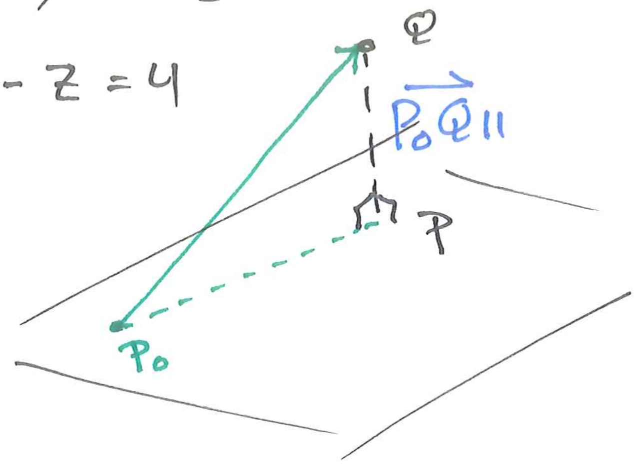
31.10.2018 Fausk

(1) Gitt et punkt $Q(1,-1,2)$ og et plan $2x+3y-z=4$

Finn punktet P i planet nermest Q og finn avstanden fra Q til planet (den er $|\overrightarrow{PQ}|$)



En normalvektor til planet er $\vec{n} = [2,3,-1]$

Vi velger $P_0(2,0,0)$ (Det ligger i planet siden $2(2)+3\cdot 0 - 0 = 4$)

$$\overrightarrow{P_0Q} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP_0} = [1,-1,2] - [2,0,0]$$
$$= [-1,-1,2]$$

Finner komponenten til $\overrightarrow{P_0Q}$ langs normalvektoren $\vec{n}$ til planet

$$\overrightarrow{P_0Q}_{\parallel} = \overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{P_0Q} = \frac{\overrightarrow{P_0Q}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

$$= \frac{[-1,-1,2]\cdot[2,3,-1]}{2^2+3^2+(-1)^2}[2,3,-1]$$

$$= \frac{-7}{14}[2,3,-1] = -\frac{1}{2}[2,3,-1]$$

Avstanden mellom Q og planet er

$$|\overrightarrow{PQ}| = \left|\tfrac{1}{2}[2,3,-1]\right| = \tfrac{1}{2}\sqrt{14} = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{7}{2}}}}$$

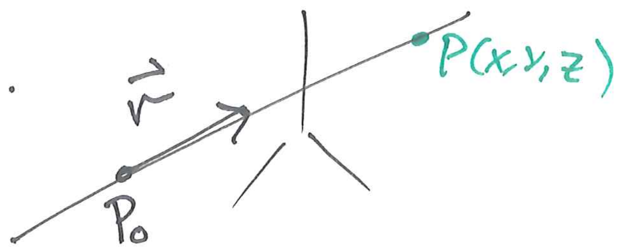
② $\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP} = [1,-1,2] - \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)[2,3,-1]}_{\vec{PQ}}$

$= [1,-1,2] + [1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$

$= [2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

Så koordinaten til P er $\underline{\underline{(2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})}}$

parametrisering av linjer.



Beskrevet av et punkt på linjen og en retningsvektor parallell til linjen

P(x,y,z) ligger på linjen $\Leftrightarrow$

$\vec{P_0P} = t\vec{r}$ t reelt tall

$\vec{OP} - \vec{OP_0} = t\vec{r}$

$[x,y,z] = \vec{OP_0} + t\vec{r}$

Eks. $\vec{r} = [1,-2,5]$ og $P_0(1,0,-3)$

$[x,y,z] = [1,0,-3] + t[1,-2,5]$

$= [1+t, -2t, -3+5t]$

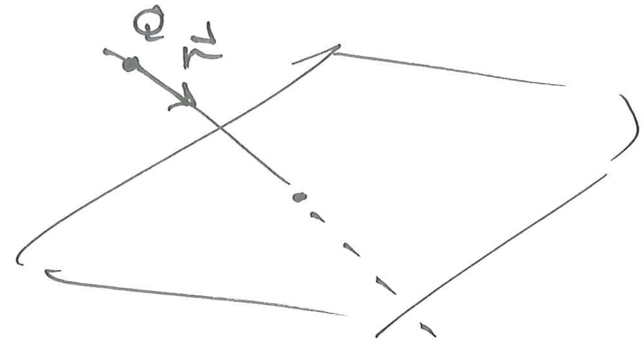
alternativ skrivemåte

$x = 1+t$

$y = -2t$ $t \in \mathbb{R}$

$z = -3+5t$

Et plan og en linje
③ krysser typisk i ett punkt



Finn snittpunktet mellom planet $3x + z - y = 2$

og linjen gjennom $Q(-1,2,-3)$ med retningsvektor $[1,-2,5]$

parametrisere linjen
(x,y,z) er på linjen $\Leftrightarrow$

$$[x,y,z] = \vec{OQ} + t \cdot \vec{r}$$
$$[-1,2,-3] + t[1,-2,5]$$

(x,y,z) ligger i planet presis når $3x+z-y=2$.

Punkt på linjen som også ligger i planet må derfor oppfylle likningen

$$3(-1+t) + (-3+5t) - (2-2t) = 2$$
$$-3 + 3t - 3 + 5t - 2 + 2t = 2$$
$$10t = 2-(-8) = 10$$
$$\underline{t = 1}$$

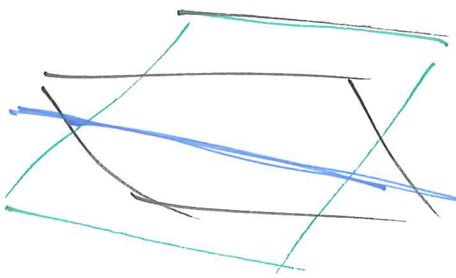
Koordinaten til snittpunktet er derfor gitt ved $[x,y,z] = [-1,2,-3] + 1 \cdot [1,-2,5]$
$= [0,0,2]$

$\underline{\underline{P(0,0,2)}}$

④ Snittet av to plan er typisk en linje

Finn linjen som er snittet (felles punkt) til plana gitt ved

$$x + y = 3$$
$$x - 2y + 3z = 0$$



Linjen må være vinkelrett på normalvektorene til begge plana (siden linjen ligger i begge plana)

Derfor er kryss-produktet til normalvektorene en retningsvektor til linjen.

$\vec{n}_1 = [1, 1, 0]$ $\qquad$ $\vec{n}_2 = [1, -2, 3]$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = [3, -3, -3]$$

Velger retningsvektoren $\vec{r} = [1, -1, -1]$

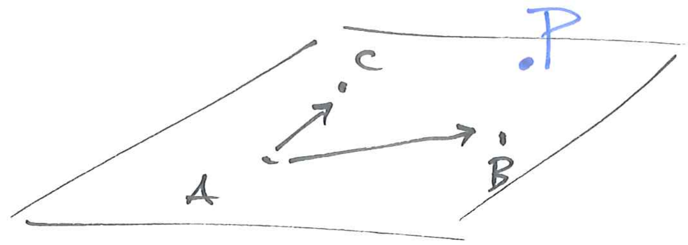
Et punkt på linjen er $P_0(2, 1, 0)$ (begge likningene for plana er oppfylt)

En parametrisering for linjen er

$$[x, y, z] = [2, 1, 0] + t[1, -1, -1]$$

5

parametrisering av plan



Tre punkt A, B, C (som ikkje ligger på en linje) bestemmer et plan gjennom punkta

Vektorer $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ er ikkje parallelle

$P(x,y,z)$ ligger i planet $\Leftrightarrow$

finnes s og t slik at

$$\vec{OP} = \vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{AC}$$

Parametriser planet gjennom $A(1,-2,3)$

som er generert av $\vec{a} = [-2, 3, 0]$
(utspenner planet) $\vec{b} = [5, 4 -3]$

$$[x,y,z] = \vec{OA} + s\vec{a} + t\vec{b}$$

$$= [1,-2,3] + s[-2,3,0] + t[5,4,-3]$$

alternativt:

$$x = 1 - 2s + 5t$$

$$y = -2 + 3s + 4t$$

$$z = 3 \qquad -3t$$

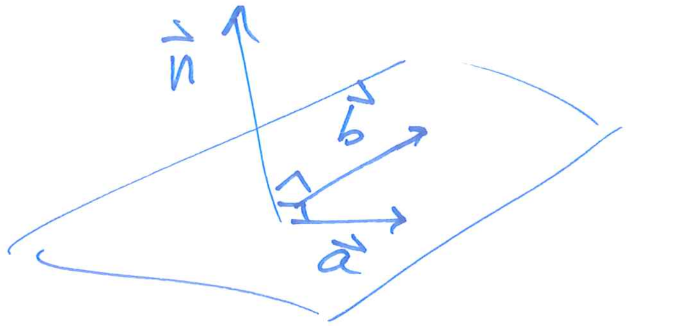
6 Finn en parametrisering til planet

$$x + 2y + 3z = 5$$

En normalvektor til planet er $\vec{n} = [1, 2, 3]$

Et punkt i planet er $(0, 1, 1)$ (likningen er oppfylt)

To ikke-parallelle vektorer vinkelrett på normalvektoren $\vec{n}$ til planet vil utspenne planet



To slike vektorer er

$\vec{a} = [2, -1, 0]$

$\vec{b} = [1, 1, -1]$ (prøver oss frem..)

parametriseringen er

$$[x, y, z] = [0, 1, 1] + s[2, -1, 0] + t[1, 1, -1]$$

$$s, t \in \mathbb{R}$$

Andre valg av punktet og vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som utspenner planet gir en annen parametrisering av det samme planet.

Oppgave 7. Gitt parametriseringen

$$x = 2 + s - t$$
$$y = 3 - 2s + 5t$$
$$z = 7 + 2s + 2t$$

Finn en likning for planet.

$$[x,y,z] = \underbrace{[2,3,7]}_{\vec{OP_0}} + s\underbrace{[1,-2,2]}_{\vec{a}} + t\underbrace{[-1,5,2]}_{\vec{b}}$$

Parametriseringen på vektorform

En normalvektor $\vec{n}$ til planet har egenskap

$$\vec{n}\cdot\vec{a} = 0, \quad \text{og} \quad \vec{n}\cdot\vec{b} = 0$$

En slik vektor er $\vec{a}\times\vec{b}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = [-14, -4, 3]$$

La normalvektoren være $\vec{n} = -\vec{a}\times\vec{b} = [14,4,-3]$.

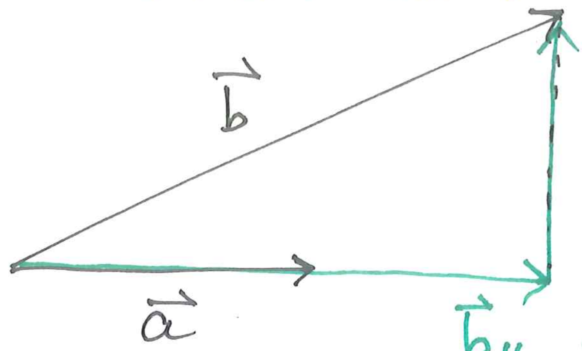
Et punkt i planet er $P_0(2,3,7)$ (når $s=t=0$)

$$[x,y,z]\cdot\vec{n} = \vec{OP_0}\cdot\vec{n}$$

hvis og bare hvis (x,y,z) er i planet

$$14x+4y-3z = [2,3,7]\cdot[14,4,-3]$$
$$= 28+12-21$$
$$\underline{14x+4y-3z = 19}$$

DEKOMPONERING



$\vec{b}_\perp$ vinkelrett på $\vec{a}$

$\vec{b}_\parallel$ parallell til $\vec{a}$

$$\vec{b}_\parallel = \frac{(\vec{b}\cdot\vec{a})\,\vec{a}}{|\vec{a}|^2}$$ komponenten til $\vec{b}$ langs $\vec{a}$

$$\vec{b}_\perp = \vec{b} - \vec{b}_\parallel$$ komponenten til $\vec{b}$ vinkelrett på $\vec{a}$

$$\vec{b} = \vec{b}_\parallel + \vec{b}_\perp .$$