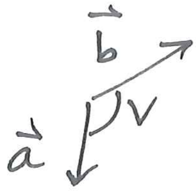
26 okt 2018

145 Vektorproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$ trevektora $\vec{a}, \vec{b}$
(kryssproduktet) er en ny trevektor



1) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(v)$
(så $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$)

2) $\vec{a} \times \vec{b}$ står vinkelrett på planet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{a} \times \vec{b}$ er et høyrehandssystem

Dette bestemmer $\vec{a} \times \vec{b}$.

$\vec{a} \times \vec{b}$ er lineær i både $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
Anta $\vec{a} \times \vec{b}$ er kjent.

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})$$

Benytter linearitet:

$$2\vec{a} \times (3\vec{a} + 2\vec{b}) + \vec{b} \times (3\vec{a} + 2\vec{b})$$

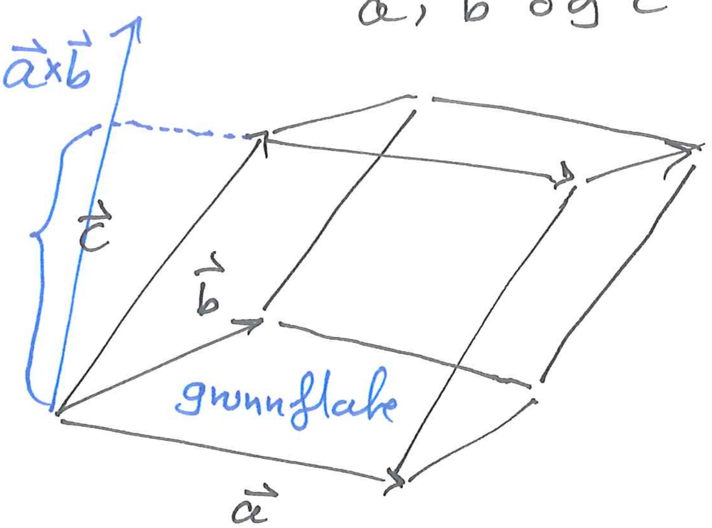
$$2(\underbrace{3\vec{a} \times \vec{a}}_{\vec{0}} + 2\vec{a} \times \vec{b}) + 3\vec{b} \times \vec{a} + \underbrace{2\vec{b} \times \vec{b}}_{\vec{0}}$$

$$= 4\vec{a} \times \vec{b} + 3\underbrace{\vec{b} \times \vec{a}}_{-\vec{a} \times \vec{b}} = 4\vec{a} \times \vec{b} - 3\vec{a} \times \vec{b}$$

$$= (4-3)\vec{a} \times \vec{b} = \underline{\vec{a} \times \vec{b}}$$

parallellepiped utspent av $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$

(2)



14.6 i boken

$|\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|$ er volumet til parallellepipedet

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = [c_1, c_2, c_3]\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Dette kalles trevektorproduktet (eller trippelproduktet) av $\vec{c}$, $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

(Determinanter skifter fortegn når to rader byttes)

så $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

$= -\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$ etc

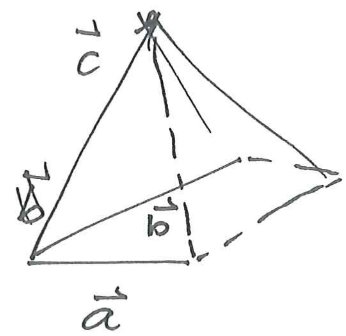
Regn ut volumet til parallellepipedet

(3) utspent av $\vec{a} = [1, 2, -3]$
$\vec{b} = [4, -1, 2]$
$\vec{c} = [-1, 1, -1]$

Vi har tidligere regnet ut
$$\vec{a} \times \vec{b} = [1, -14, -9]$$

Volumet er
$$V = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$$
$$= |[-1, 1, -1] \cdot [1, -14, -9]|$$
$$= |-1 - 14 + 9| = |-6| = \underline{\underline{6}}$$

Pyramide med grunnflate parallellogrammet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$ og toppen gitt ved $\vec{c}$.

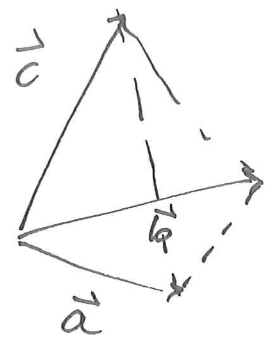


Volumet til pyramiden
$= \frac{1}{3}$ volumet til parallellepipedet utspent av $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$.

I eksempelet ovenfor er volumet til pyramiden lik $\frac{6}{3} = \underline{\underline{2}}$

(4)

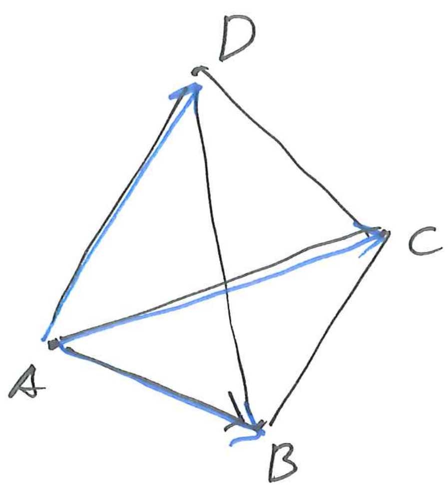
Tetraeder utspent av $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$



Volumet til tetraederet

$= \frac{1}{6}$ volumet til parallellepipedet utspent av $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$

$= \frac{1}{6} |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$

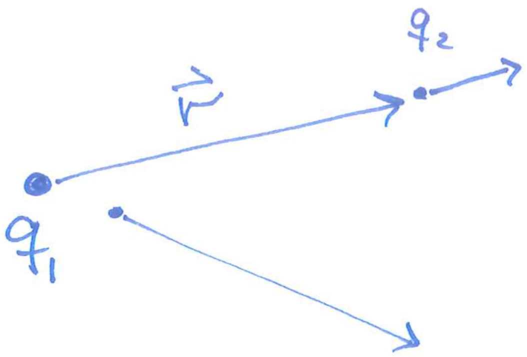


(La $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$)

Dette er tetraederet utspent av vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AD}$.

Volumet $V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})|$

Elektromagnetisme



q ladning

$$\vec F = k\, q_1 \frac{\vec r}{|\vec r|^3} \cdot q_2$$

k konstant.

Magnetfelt $\vec B$

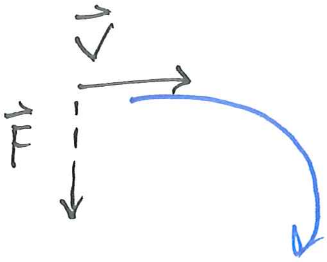
$$F = q \cdot \vec V \times \vec B$$

v fartsvektor

Anta feltet peker ut av arket og er konstant

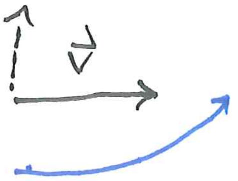
$\vec F$ står vinkelrett på bevegelsen.
Så arbeidet
$$W = \vec F \cdot \underbrace{\Delta \vec s}_{\text{liten forskyvning}} = 0$$

$q>0$



sirkel-baner

$q<0$



$\vec V$ endrer retning men ikke størrelse

Lineært vil si at sum og skalarmultiplikasjon respekteres

Eks * skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$ er lineært i $\vec{a}$ vil si

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}$$

$$(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

* Determinanten er lineær i hver radvektor

Anvendelse av linearitet

$|2\vec{a} - 5\vec{b}|$ uttrykt ved $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ og $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

$$|2\vec{a} - 5\vec{b}|^2 = (2\vec{a} - 5\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 5\vec{b})$$

$$= 2\vec{a} \cdot (2\vec{a} - 5\vec{b}) - 5\vec{b} \cdot (2\vec{a} - 5\vec{b})$$

$$= 2^2 \vec{a} \cdot \vec{a} + 2(-5)\vec{a} \cdot \vec{b} - 5(2)\vec{b} \cdot \vec{a} + (-5)^2 \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= \underline{4|\vec{a}|^2 + 25|\vec{b}|^2 - 20\vec{a} \cdot \vec{b}}$$