① Vektorproduktet (kryss-produktet)

Tar inn to 3-vektorer og gir en 3-vektor

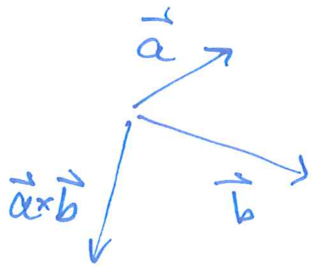
$\vec{a} \times \vec{b}$

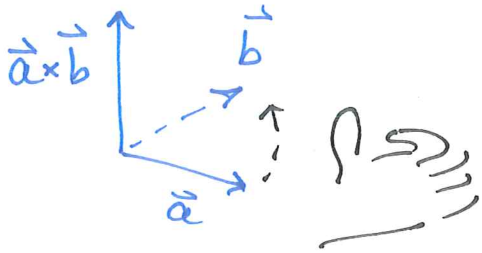
Definisjon 1) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(v)$

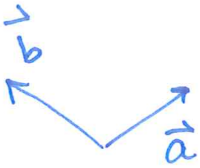
v vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

2) $\vec{a} \times \vec{b}$ er ortogonal (vinkelrett på) til både $\vec{a}$ og $\vec{b}$ (når $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikke er parallelle)

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{a} \times \vec{b}$ er et høyrehandsystem







i planet

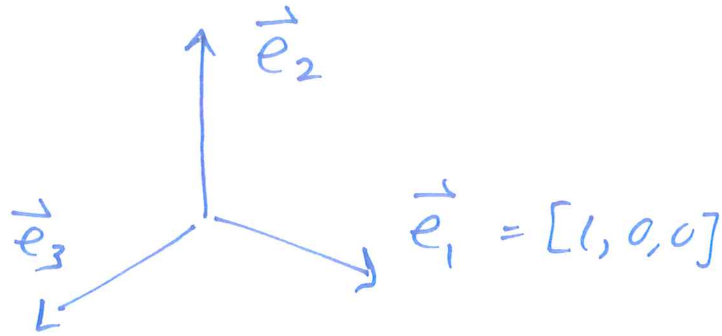
$\vec{a} \times \vec{b}$ peker rett ut av arket.

Vi vrir høyrehand fra første til andre vektor. Tommelen vil da peke i retning til den tredje vektoren.

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

vektorproduktet er antisymmetrisk

(2)



$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ er et høyrehandsystem.

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

($|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \sin(90^\circ) = 1$

vektorer vinkelrett på $\vec{e}_1$ og $\vec{e}_2$ er parallelle til $\vec{e}_3$ (z-aksen)

$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = + \vec{e}_3$ eller $-\vec{e}_3$. Høyrehandsregelen gir at $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$)

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 = -\vec{e}_3 \times \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 \times \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}$$

$$|\vec{e}_1 \times \vec{e}_1| = |\vec{e}_1|^2 \sin(0^\circ) = 0$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0}$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}$$

(3) $\vec{e}_1 = \vec{i}$ $\quad \vec{e}_2 = \vec{j}$ $\quad \vec{e}_3 = \vec{k}$

alternativ (enklere?) notasjon for enhets-vektorene i x, y og z-retning

$(\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{i}$

$\vec{j} \times (\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$

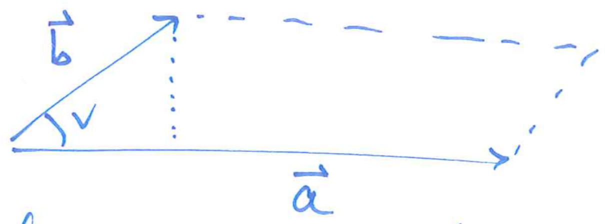
$\underbrace{(\vec{j} \times \vec{j})}_{\vec{0}} \times \vec{k} = \vec{0}$ kryssproduktet er ikke assosiativt!

$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ er meningsløst

er det $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ eller $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$?

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$



er arealet til parallellogrammet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

$\vec{a} \times \vec{b}$ er lineært i både $\vec{a}$ og $\vec{b}$

$(t\vec{a}) \times \vec{b} = t(\vec{a} \times \vec{b})$

$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$

(ikkje opplagt)

Ser først på kryssproduktet for vektorer i xy-planet.

(4)

$$[x_1, y_1, 0] \times [x_2, y_2, 0]$$

$$(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j})$$

lineært produkt gir

$$x_1 x_2 \underbrace{\vec{i} \times \vec{i}}_{\vec{0}} + x_1 y_2 \underbrace{\vec{i} \times \vec{j}}_{\vec{k}} + y_1 x_2 \underbrace{\vec{j} \times \vec{i}}_{-\vec{k}} + y_1 y_2 \underbrace{\vec{j} \times \vec{j}}_{\vec{0}}$$

$$= (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \left[0, 0, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right]$$

Tilsvarende får vi generelt

$$[x_1, y_1, z_1] \times [x_2, y_2, z_2] =$$

$$\left[\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right]$$

(Detaljene finner dere i forkursforelesning 25.01.2018)

(Vi minner om 2×2-determinanter

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - bc$$
)

Minus tegnet i y-koordinaten kommer fra

$$x_1 z_2 \underbrace{\vec{i} \times \vec{k}}_{-\vec{j}} + x_2 z_1 \underbrace{\vec{k} \times \vec{i}}_{\vec{j}} = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j}$$

Eksempel $\vec{a} = [1,2,0]$ og $\vec{b} = [3,5,7]$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left[\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \right]$$

5

$$= [2 \cdot 7 - 0, -(1 \cdot 7 - 0), 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3]$$

$$= \underline{[14, -7, -1]}.$$

Finn $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 14 \cdot 1 - 7 \cdot 2 + 0 = 0$

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 14 \cdot 3 - 7 \cdot 5 - 1 \cdot 7$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot 7 - (5+1) \cdot 7 = 0$$

Finn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 13$ $\quad |\vec{a}| = \sqrt{5}$ $\quad |\vec{b}| = \sqrt{83}$

og vinkelen v mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{13}{\sqrt{5 \cdot 83}}$$

$$v \simeq \underline{50.34^\circ}$$

Vi regner ut $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(v)$ og sammenlikner med $|\vec{a} \times \vec{b}|$

$$|\vec{a}||\vec{b}|\sin(v) = \sqrt{5 \cdot 83} \sin(v)$$
$$= \underline{15.684}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |[14, -7, -1]| = \sqrt{196 + 49 + 1}$$
$$= \sqrt{246}$$
$$\sim 15.684$$

Vi observerer at

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(v)$ i dette tilfellet.

Determinanter av 3×3 matriser

6

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$\left(= \begin{vmatrix} a_1 & - & - \\ | & b_2 & b_3 \\ | & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} - & a_2 & - \\ b_1 & | & b_3 \\ c_1 & | & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} - & - & a_3 \\ b_1 & b_2 & | \\ c_1 & c_2 & | \end{vmatrix} \right)$$

Eksempel

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (1 - 0) - 2(4 - 6) + 1(0 - 3)$$

$$= 1 + 4 - 3 = \underline{\underline{2}}$$

Vektorproduktet uttrykt ved determinant

$[a_1, a_2\ a_3] \times [b_1, b_2, b_3]$

7

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

oppg. Finn $\vec{a} \times \vec{b}$ når

$\vec{a} = [1, 2, -3]$ og $\vec{b} = [0, 5, -1]$.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, -3 \\ 5, -1 \end{vmatrix} \vec{i} +$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (-2 - (-15))\vec{i} - (-1 - 0)\vec{j} + (5 - 0)\vec{k}$$

Så $\vec{a} \times \vec{b} = \underline{[13, 1, 5]}$