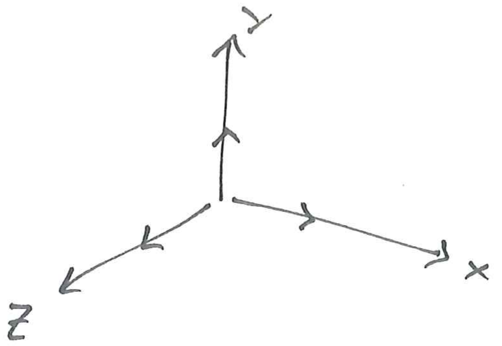
22. okt 2018 Faush

14 Vektorer i rommet

(1)



enhets basisvektorene

$\vec{e}_1 = [1, 0, 0]$

$\vec{e}_2 = [0, 1, 0]$

$\vec{e}_3 = [0, 0, 1]$

Vektor $\vec{V} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$

$= [x, y, z]$ vektoren på koordinatform

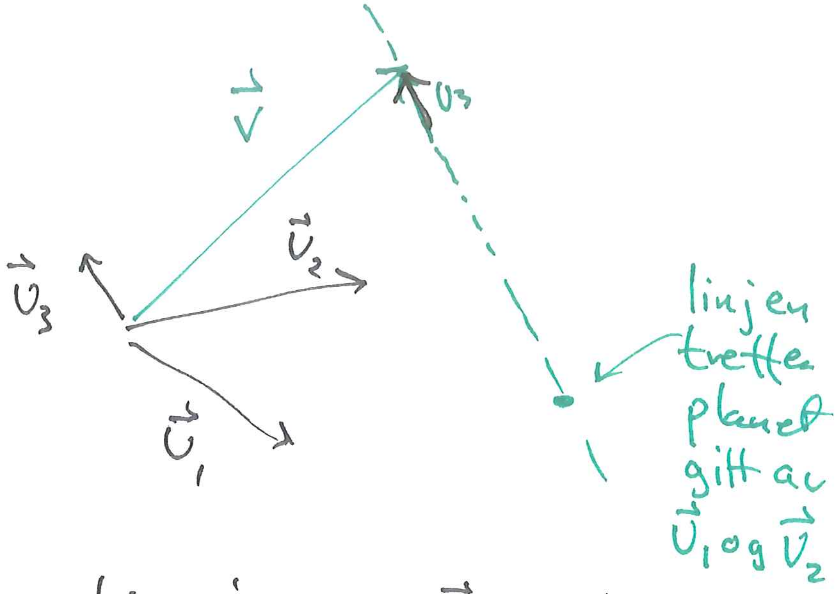
Vektorer	$\longleftrightarrow$	Punkt
(x, y, z)	$\longleftrightarrow$	$[x, y, z]$
endepunktet til vektoren når den starter i origo O		vektoren fra origo til punktet

Resultat

For 3 vektorer $\vec{U}_1, \vec{U}_2$ og $\vec{U}_3$ som ikke ligger i et felles plan (: utspenner rommet) finnes det for enhver vektor $\vec{V}$ skalarer a_1, a_2, a_3 slik at

$$\vec{V} = a_1\vec{U}_1 + a_2\vec{U}_3 + a_3\vec{U}_3$$

2



$\vec{V} - a_3 \cdot \vec{U}_3$ = kombinasjon av $\vec{U}_1$ og $\vec{U}_2$

(i planet utspent av dem)

$= a_1\vec{U}_1 + a_2\vec{U}_2$

$$\vec{V} = a_1\vec{U}_1 + a_2\vec{U}_2 + a_3\vec{U}_3$$

a_1, a_2, a_3 er entydige

14.2. Addisjon og skalarmultiplikasjon av 3-vektorer utføres elementvis

3

$\vec{a} = [1, -2, 4]$ $\quad\quad$ $\vec{b} = [3, 0, 7]$

$3\vec{a} = [3\cdot 1,\ 3(-2),\ 3\cdot 4] = [3, -6, 12]$

$\vec{a} + \vec{b} = [1+3, -2+0, 4+7] = [4, -2, 11]$

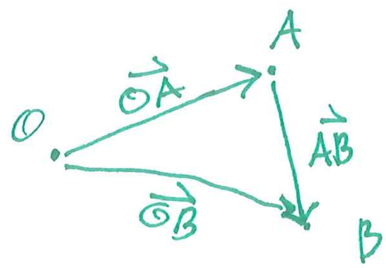
motsattvektoren til $\vec{a}$:

$-\vec{a} = (-1)\cdot\vec{a} = [-1, 2, -4]$

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) =$

$[1-3,\ -2-0,\ 4-7]$

$\vec{a} - \vec{b} = [-2, -2, -3]$.



oppgave Punkt $B(1, -2, 5)$

$2\vec{AB} = [2, 4, 3]$

Finn koordinaten til punktet A.

$\vec{OA} = \vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OB} - \vec{AB}$

$\vec{OB} = [1, -2, 5]$. $\quad\quad$ $\vec{AB} = \frac{1}{2}[2, 4, 3]$

$= [1, 2, 3/2]$

$\vec{OA} = [1, -2, 5] - [1, 2, 3/2] = [0, -4, 7/2]$

Koordinatene til A er $\underline{(0, -4, 7/2)}$

Egenskaper til normen:

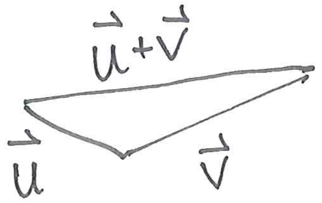
$$|\vec{v}| \geq 0$$

$$|\vec{v}| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$$

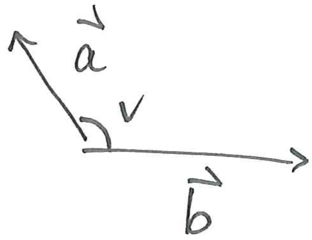
5 $$|t\vec{v}| = |t| \cdot |\vec{v}|$$

$$|\vec{v} + \vec{u}| \leq |\vec{v}| + |\vec{u}|$$

trekantulikheten



14.4 Skalarprodukt



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(v)$$

Lineært i både $\vec{a}$ og $\vec{b}$

(to vektorer ligger i et plan i $\mathbb{R}^3$)

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1 \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \qquad i \neq j$$

skalarproduktet på koordinatform

$$[x_1, y_1, z_1] \cdot [x_2, y_2, z_2]$$

$$= x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Benytt linearitet på

$$(x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3) \cdot (x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3)$$

Hvilke av vektorene

$\vec{a} = [1, 2, 3]$, $\vec{b} = [3, -3, 1]$ og

6 $\vec{c} = [1, 1, 0]$

er ortogonale (står vinkelrett på hverandre)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = [1, 2, 3] \cdot [3, -3, 1] = 3 - 6 + 3 = 0$

$\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ så $\vec{a} \perp \vec{b}$

$\vec{b} \cdot \vec{c} = [3, -3, 1] \cdot [1, 1, 0] = 3 - 3 = 0$

$\vec{b} \perp \vec{c}$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = [1, 2, 3] \cdot [1, 1, 0] = 1 + 2 = 3 \neq 0$

så $\vec{a}$ og $\vec{c}$ er ikke ortogonale

oppgave $\vec{a} = [1, -1, 2]$, $\vec{b} = [3, -2, -1]$

Finn lengdene $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$

skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$

$\vec{a} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \underline{\sqrt{6}}$

$\vec{b} = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2}$

$\vec{b} = \underline{\sqrt{14}}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = [1, -1, 2] \cdot [3, -2, -1] = 1 \cdot 3 + (-1)(-2) + 2(-1)$

$\underline{= 3}$

$\cos(v) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{3}{\sqrt{6}\sqrt{14}}$

$v = \arccos\left(\dfrac{3}{\sqrt{6 \cdot 14}}\right) = \underline{70.89°}$

Eks

Bestem t slik at

$\vec{a} = [t, t^2, t^3]$ og $\vec{b} = [-6, 2, 4]$ er ortogonale.
(står vinkelrett på hverandre)

7

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6t + 2t^2 + 4t^3$
$= 2t(2t^2 + t - 3)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ for $t = 1, \frac{-3}{2}, 0$

(abc-formelen: $2t^2 + t - 3 = 0$

$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-3) \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 5}{4}$)

$\vec{a} = \vec{0}$ for $t = 0$ $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ikke ortogonale

$t \neq 0$ er $\vec{a} \neq 0$ så $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
$\vec{b} \neq 0$

Så $\vec{a} \perp \vec{b}$ for $\underline{t = -3/2 \text{ og } t = 1}$