17.10.2018 Fausk

Parallelle vektorer

$\vec{u} = \vec{0}$

$\vec{v}$

Vilkårlige $\vec{v}$

$\vec{u} \neq 0$

$\vec{u}$

$\vec{v}$ samme retning

$\vec{v} = t \cdot \vec{u}$ $\quad t > 0$

$\vec{v}$ motsatt retning

$\vec{v} = t \cdot \vec{u}$

$t < 0$

$\vec{v} = \vec{0}$ $\quad \vec{v} = t \cdot \vec{u}$

$t = 0$

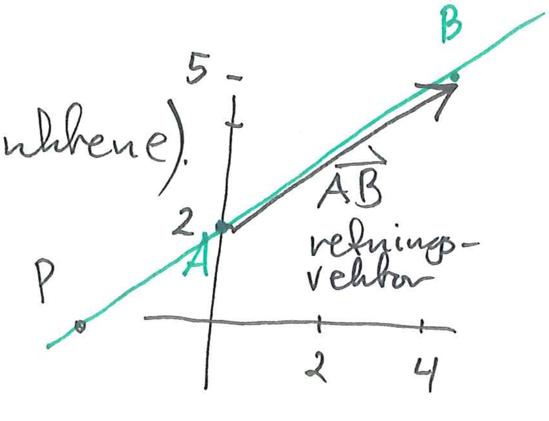
(1)

$\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle : $\vec{u} = \vec{0}$ eller det finnes en t slik at $\vec{v} = t \cdot \vec{u}$

Gi en parameterfremstilling av linjen gjennom

A(0, 2) og B(4, 5)

(Parametriser linjen gjennom punktene).



$\vec{OA} = [0, 2]$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [4,5] - [0,2]$

$= [4, 3]$.

Parametrisering : P på linjen $\Leftrightarrow$ $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{AB}$

$t \in \mathbb{R}$

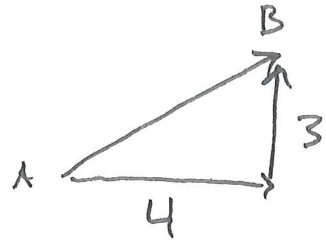
P(x, y)

$[x, y] = [0, 2] + t[4, 3]$

② $x = 0 + 4t = 4t$ $\quad t \in \mathbb{R}$

Linje: $y = 2 + 3t$

Hva er stigningstallet til linja?



$\vec{AB} = [4,3]$

Stigningstallet er $\frac{3}{4} = 0.75$

oppgave skriv den parametriserte linjen

$x = -2 + 3t$
$y = \frac{5}{3} + 2t$

(linjen går gjennom $(-2, 5/3)$
én retningsvektor er $[3,2]$)

på formen $y = ax + b$

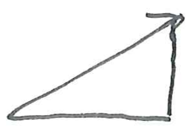
1) uttrykker t ved hjelp av x og setter inn i uttrykket for y:

$x + 2 = 3t \Rightarrow t = \frac{x+2}{3}$

setter inn: $y = \frac{5}{3} + 2\left(\frac{x+2}{3}\right) = \frac{2 \cdot x}{3} + \underbrace{\frac{5}{3} + \frac{4}{3}}_{\frac{9}{3} = 3}$

$y = \frac{2}{3} \cdot x + 3$

2) Retningsvektor $[3,2]$



stigningstallet er $2/3$.

$y = \frac{2}{3}x + b$.

Siden $(-2, 5/3)$ ligger på linjen, må

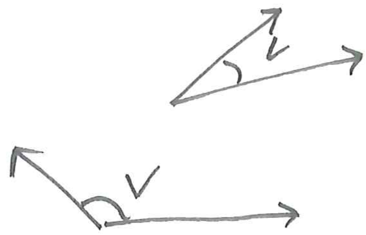
$5/3 = \frac{2}{3}(-2) + b \Leftrightarrow \frac{5}{3} = \frac{-4}{3} + b$

Så $b = \frac{9}{3} = 3$. som gir

$y = \frac{2}{3}x + 3$.

③

13.2 - 13.5 Skalarprodukt



Vinkelen mellom to vektorer ligger mellom 0° og 180°

Skalarproduktet mellom to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er definert som

$$\underline{\underline{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(v)}}$$

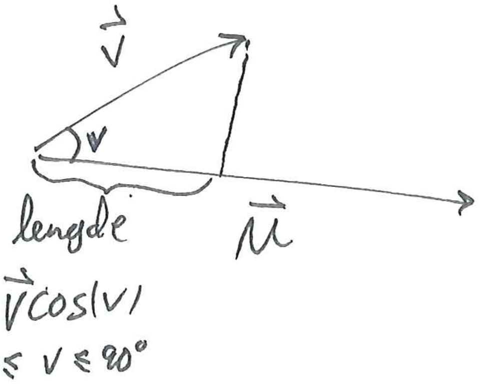
v vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$

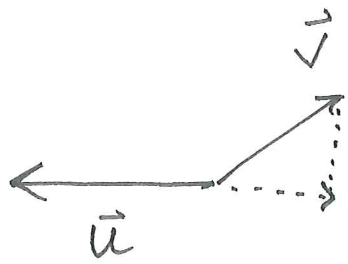
$\vec{u} \cdot \vec{v}$ er en skalar

$$-|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

Andre navn:

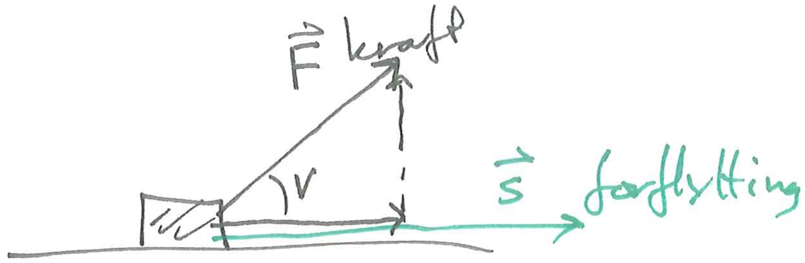
Skalarprodukt, (dot produkt) prikk produkt, indreprodukt





$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot$ lengden av komponenten til $\vec{v}$ langs $\vec{u}$ $\cdot$ (−1 hvis de peker i motsatt retning)

4



Arbeidet $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ er et skalarprodukt

Eks Finn $\vec{a} \cdot \vec{b}$ når $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ og vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $v = 45^\circ$

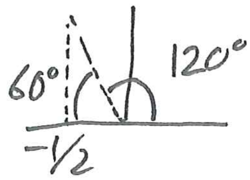
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot \cos(45^\circ) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{3 \cdot \sqrt{2}}$$

(Siden $2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$)

Oppg.

1) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ og $v = 120^\circ$

Hva er $\vec{a} \cdot \vec{b}$?



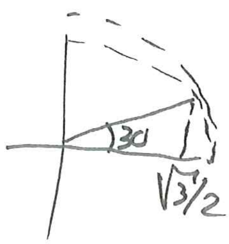
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(v)$$
$$= 2 \cdot 3 \underbrace{\cos(120^\circ)}_{-1/2} = \underline{\underline{-3}}$$

2) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ og $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}/2$

Hva er vinkelen v mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$?

$$\cos v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\sqrt{3}/2}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

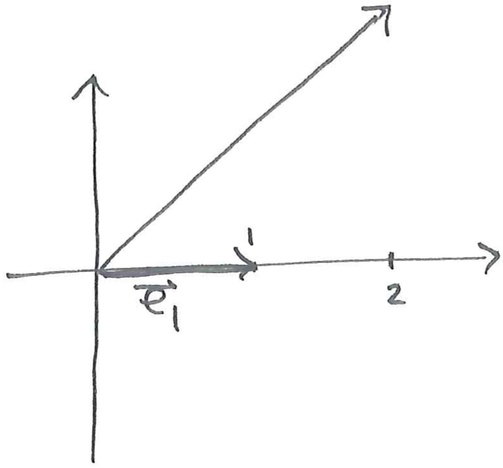
Så $v = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{30^\circ}$



Beskriv alle vektorer $\vec{b}$ slik at

(5) $\vec{b} \cdot \vec{e_1} = 2$ hvor $\vec{e_1} = [1, 0]$

enhetsvektor i x-retning.



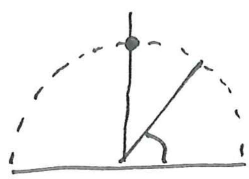
Løsningen er alle vektorer $\vec{b}$ som har x-koordinat lik 2.

$$\vec{b} = [2, y] \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Hvis $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, da må $|\vec{a}| = 0$ eller $|\vec{b}| = 0$

eller $\cos(V) = 0$.

$\cos(V) = 0 \iff V = 90°$ siden $0 \leq V \leq 180°$



$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ og $\vec{a} \neq \vec{0}$ og $\vec{b} \neq 0$

da må vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være $90°$

vi sier at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ står vinkelrett på hverandre

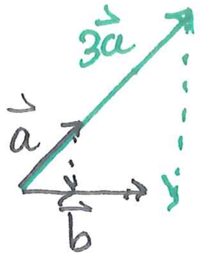
eller at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er <u>ortogonale</u>

Egenskaper til skalarproduktet

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \qquad (\text{siden } \cos 0^\circ = 1)$$

6

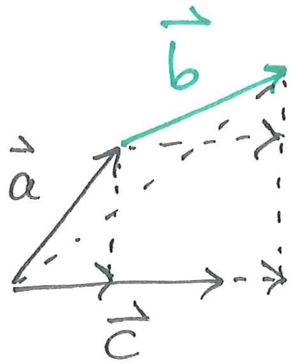
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$



$$(t\,\vec{a})\cdot\vec{b} = t(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

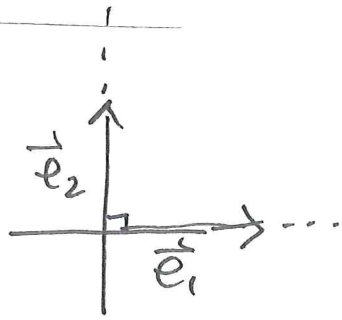
(og da også lineært i den andre vektoren)

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$$



Skalarproduktet er lineært i begge vektorene.

$\vec{e}_1 = [1,0]$ $\qquad$ $\vec{e}_2 = [0,1]$



$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 = |\vec{e}_1|^2 = 1$$

$$\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 = |\vec{e}_2|^2 = 1$$

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = 0$$

Skalarproduktet for vektorer på koordinatform

(7) $$[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2$$

Vi synes dette ved å benytte linearitet
(alternativt benytt kosinussetningen ...)
(se notater vår 2018.)

$$[x_1, y_1] = x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2$$

$$[x_2, y_2] = x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2$$

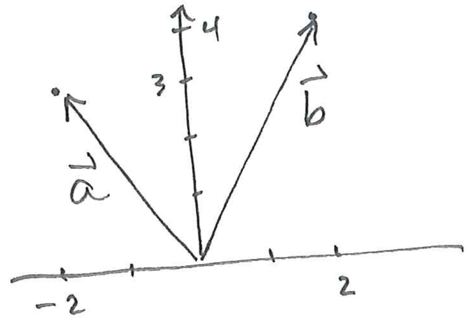
$$[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = (x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2) \cdot (x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2)$$

$$= x_1 \cdot x_2 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}_{1} + x_1 y_2 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}_{0} + x_2 y_1 \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1}_{0} + y_1 y_2 \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2}_{1}$$

$$= \underline{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}.$$

oppgave

Finn vinkelen mellom $\vec{a} = [-2, 3]$ og $\vec{b} = [2, 4]$



$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

(enklere: $\vec{b} = 2[1, 2]$ så $|\vec{b}| = 2\,|[1, 2]| = 2\sqrt{1^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = [-2, 3] \cdot [2, 4] = (-2)2 + 3 \cdot 4 = 8$$

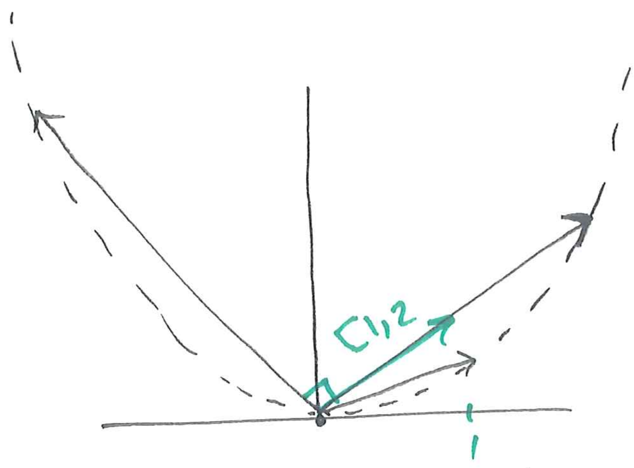
$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{8}{\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{5}}$$

$$v = \underline{60.25^\circ}$$

Bestem k slik at vektorene

$[k, k^2]$ og $[1, 2]$ er ortogonale
(vinkelrette på hverandre)

⑧



$$[k, k^2] \cdot [1, 2] = k \cdot 1 + k^2 \cdot 2 = 2k^2 + k$$

$= 0$

når $2k^2 + k = 0$

$2k(k + \frac{1}{2}) = 0$

$k = 0$ eller $k = -1/2$.

$k=0$ så er $[k, k^2] = \vec{0}$ vektorene er ikke ortogonale

$k = -1/2$ begge vektorene er ulik $\vec{0}$. siden skalarproduktet er 0 må vinklene være ortogonale.

Løsningen er $\underline{k = -1/2}$

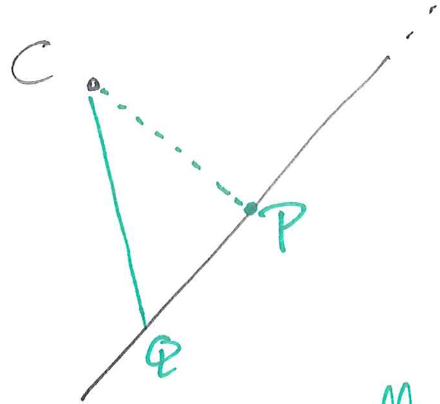
Vektorene er da $[-1/2, 1/4]$ og $[1, 2]$

$C(-1,3)$

Linje parametrisert ved $\quad x = 2t$, $\quad y = -1+3t$

Finn punktet på linjen nermest C

(9)



$\overrightarrow{CP}$ er vinkelrett på linjen eller $C = P$.

En retningsvektor er $\vec{r} = [2,3]$.

$\overrightarrow{CP} = [2t, -1+3t] - [-1,3]$ | P parametrisert med t

$= [2t+1, -4+3t]$

$\vec{r} \neq \vec{0}$

$\overrightarrow{CP} \cdot \vec{r} = 2(2t+1) + 3(-4+3t)$

$= 4t+2 \quad -12+9t = -10+13t$

$\overrightarrow{CP} \cdot \vec{r} = 0$ når $\quad -10+13t = 0$

$t = \frac{10}{13}$.

$\overrightarrow{CP}$ er da lik $\quad \overrightarrow{CP} = \left[\frac{20}{13}, -1+\frac{30}{13}\right]$

$= \left[\frac{20}{13} + \frac{17}{13}\right]$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$

$= [-1,3] + \left[\frac{20}{13}, \frac{17}{13}\right] = \left[\frac{7}{13}, \frac{56}{13}\right]$.

punktet på linjen nermest C er $\left(\frac{7}{13}, \frac{56}{13}\right)$