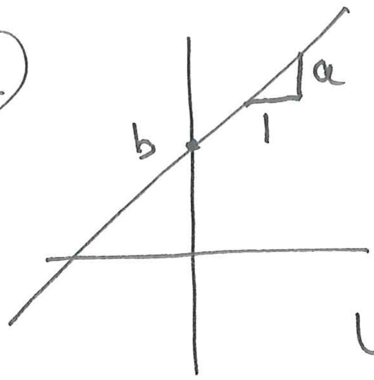
Faush

15.10.2018 Parametrisering av linjer i $\mathbb{R}^2$

(1)



oblig 4
man. 3 des.
PH 322

Linjen kan beskrives som løsningene til likningen $y = ax + b$

$y = ax + b$ y-koordinat

$x \in \mathbb{R}$ x-koordint

parametrisering av linjen

$y = a \cdot t + b$

$x = t$

La nå $a = 2$, $b = -1$

$y = 2t - 1$

$x = t$

$t = s + 2$ endrer parameteren

$y = 2s + 3$

$x = s + 2$

en annen parametrisering

$s \in \mathbb{R}$

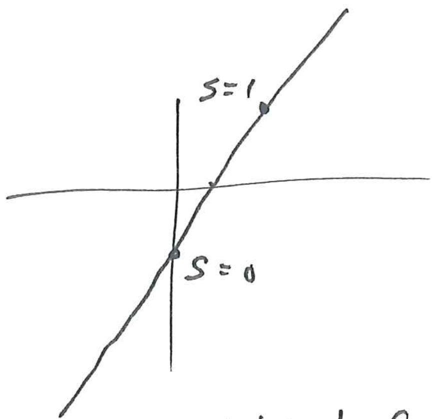
ikke-lineær parametrisering

$t = s^3$

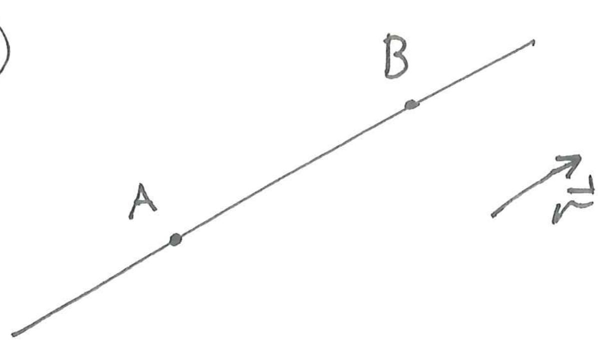
$y = 2s^3 - 1$

$x = s^3$

$s \in \mathbb{R}$

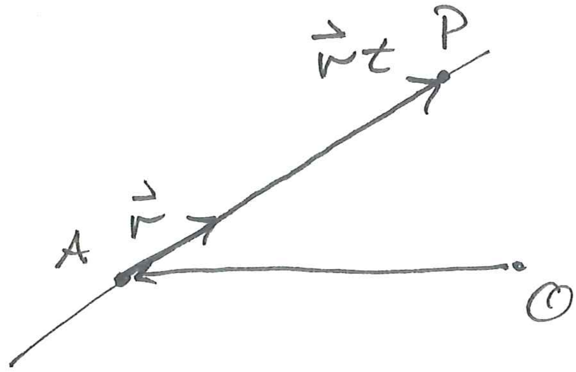


(s^3 gir alle verdier i $\mathbb{R}$: vi får hele linjen)



En vektor parallell til en linje kalles en <u>retningsvektor</u> for linjen.

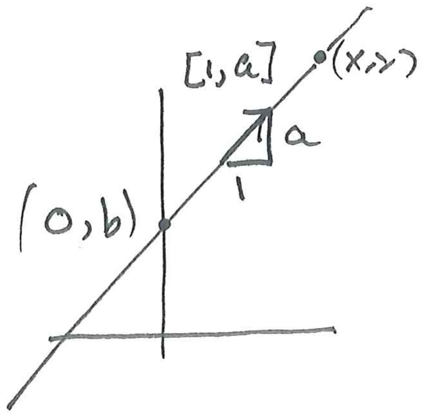
Et punkt $A(x_0, y_0)$ og en retningsvektor $\vec{r} = [a, b]$ kan brukes til å parametrisere linjen



P ligger på linjen $\Leftrightarrow$ det finnes en $t \in \mathbb{R}$

$$\vec{OP} = \vec{OA} + t \cdot \vec{r}$$

spesielt



$$\vec{OP} = [x, y]$$

$$= [0, b] + t[1, a]$$

så

$$y = a \cdot t + b$$

$$x = t$$

parametrisering vi såg på innledningsvis.

For $A(x_0, y_0)$ $\vec{r} = [a, b]$ blir parametriseringen av punktene (x, y) på linjen gjennom A og parallell til $\vec{r}$

3 $$[x, y] = [x_0, y_0] + t[a, b]$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= bt + y_0 \\ x &= a \cdot t + x_0 \end{aligned}}$$

Eksempel $A(2, -3)$ og retningsvektor $[2, 1]$.

$$y = t - 3 \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$x = 2 \cdot t + 2.$$ parametriserer linjen.

Hvor treffer linjen x-aksen? (da er $y = 0$)

$y = 0$ gir $t - 3 = 0$

så $t = 3$

x-koordinaten er da lik $2(3) + 2 = \underline{\underline{8}}$

Parametriser linjen gjennom punktene

(4) $A(1,2)$ og $B(3,-4)$.

$\vec{AB}$ er parallell til linjen.

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$= [3,-4] - [1,2] = [2 - 6]$$

$$\vec{AB} = 2[1,-3].$$

$\vec{r} = [1,-3]$ være retningsvektoren

Parametrisering $\vec{OP} = \vec{OA} + t \cdot \vec{r}$

$$[x,y] = [1,2] + t[1,-3]$$

$$x = t+1$$

$$y = -3t+2$$

En annen linje er parametrisert ved

$$x = 2s+3$$

$$y = -s+1.$$

Finn punktet hvor linjene møtes.

Linjene møtes der hvor både x og y-koordinatene er like:

$t+1 = 2s+3$ (x-koordinaten)

$-3t+2 = -s+1$ (y-koordinaten)

1. likning gir $\quad t = 2s+3-1 = 2s+2 = 2(s+1)$

Vi setter uttrykket for t inn i den andre likningen

5

$$-3(2s+2) + 2 = -s+1$$

$$-6s - 6 + 2 = -s + 1$$

så

$$-6+2-1 = 6s - s$$

$$-5 = 5s$$

$\underline{s = -1}$ (og da $t = 0$)

Koordinaten hvor linjene møtes:

$$x = 0+1 = 1$$

$$y = -3(0)+2 = 2$$

(Vi setter inn $s=-1$ også for å sjekke svaret

$$x = 2(-1)+3 = 1$$

$$y = -(-1)+1 = 2 \;)$$

Skjæringspunktet er $\underline{(1, 2)}$

15.10.2018 OPPGAVER

Tre punkt i $\mathbb{R}^3$ $A(-1,2)$ $B(2,-2)$ og $C(-5,3)$

1. Finn koordinatene til vektorene $\overrightarrow{OA}$ og $\overrightarrow{AO}$
   ($O(0.0)$ er origo)

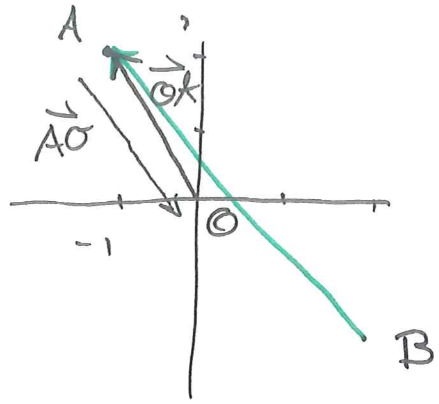
2. Finn koordinatene til vektoren $\overrightarrow{BA}$

3. Finn koordinatene til vektoren
   $3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

4. Bestem koordinaten til alle punkt D slik at $\overrightarrow{CD}$ er parallell til $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{CD}$ har lengde 10.

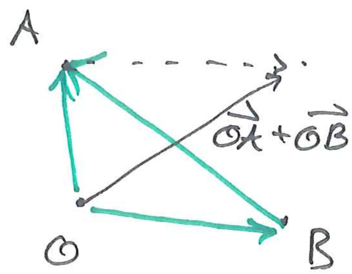
5* Finn radius og senter til sirkelen gitt ved likningen $x^2 - x + y^2 = 0$

1. $\vec{OA} = [-1, 2]$



$$\vec{AO} = -\vec{OA}$$
$$= -[-1, 2]$$
$$= [1, -2]$$

($\cancel{\overleftarrow{OA}}$ skriv heller $\vec{AO}$)



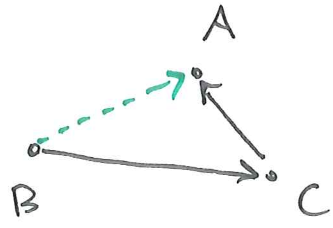
2. $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$

($\vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OA}$ trekke fra $\vec{OB}$

$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$)

$$\vec{BA} = [-1, 2] - [2, -2] =$$
$$[-1-2,\ 2-(-2)] = \underline{[-3, 4]}$$

3



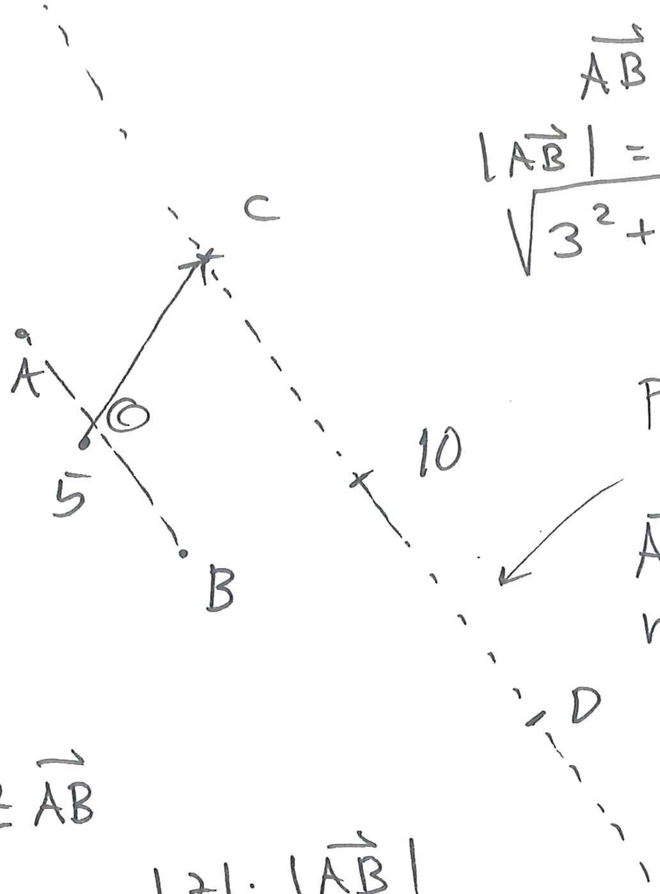
$$3\vec{AB} \underbrace{-\vec{AC}}_{+\vec{CA}} + \vec{BC}$$
$$= 3\vec{AB} + \underbrace{\vec{BC} + \vec{CA}}_{\vec{BA}}$$
$$= 2\vec{AB} + \underbrace{\vec{AB} + \vec{BA}}_{\vec{AA} = \vec{0}} = 2\vec{AB} + \vec{0}$$
$$= 2\vec{AB} = 2(-\vec{BA})$$ oppg. 2
$$= 2\cdot(-1)[-3.4] = 2\overbrace{[3, -4]}^{\vec{AB}}$$
$$= \underline{[6, -8]}$$

4

C(-5,3)

$\vec{AB} = [3,-4]$

$|\vec{AB}| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \underline{5}$



parallell til AB så $\vec{AB}$ er en retningsvektor

$\vec{CD} = t\vec{AB}$

$|\vec{CD}| = 10 = |t| \cdot \underbrace{|\vec{AB}|}_{5}$

så $|t| = \frac{10}{5} = 2$

$t = -2$ eller $t = 2$

$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD}$

$[-5,3] + t[3,-4]$.

$t = -2$: $\vec{OD} = [-5,3] - 2[3,-4]$
$= [-5,3] + [-6,8] = \underline{[-11,11]}$

$t = 2$ $\vec{OD} = [-5,3] + 2[3,-4]$
$= [-5,3] + [6,-8] = \underline{[1,-5]}$

De er to mulige punkt D. De har koordinater $\underline{(-11,11) \text{ og } (1,-5)}$

5

$$\underbrace{x^2 - x} + y^2 = 0$$

Fullfører kvadratet

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Dette har løsninger sirkelen med radius $\frac{1}{2}$ og senter $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

lengden (kvadratet) av vektoren fra $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ til (x, y).