14 sep 2018 | oblig oppg 16 og 17 | Faush

16. Anta $a, b > 0$. Da er $b > a$ ekvivalent til $b^2 > a^2$.

(1)

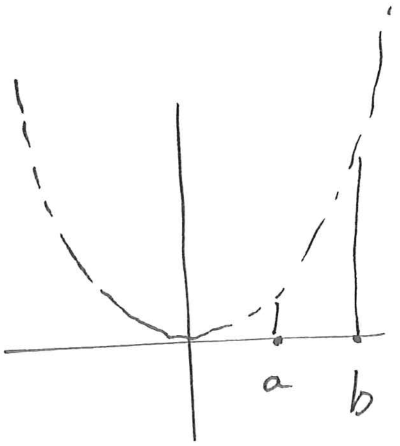
$$b > a \iff b - a > 0$$

$$b^2 > a^2 \iff b^2 - a^2 > 0$$

Konjugatsetningen gir $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ siden $b + a > 0$ (fra antakelsene) så er

$$b^2 - a^2 > 0 \iff b - a > 0$$

Så $b^2 > a^2 \iff b > a$ (når $a + b > 0$)



17. For alle $x, y > 0$ så er $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

$$\iff \left(\sqrt{x+y}\right)^2 \leq \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2$$

$$\iff x + y \leq (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y}$$

$$\iff x + y \leq x + y + \underbrace{2\sqrt{x}\sqrt{y}}_{>0}$$

$$\iff 0 \leq 2\sqrt{x}\sqrt{y}$$ Dette er sant for alle $x, y > 0$. Derfor er $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ for $x, y > 0$.

Irrasjonale likninger

Eks a) $\sqrt{2x-1} = x-1$

2 b) $\sqrt{x} = 2-x$

c) $3+\sqrt{x} = \sqrt{2(x+1)}$

$$a = b \overset{\text{implikasjon}}{\Longrightarrow} a^2 = b^2 \quad \text{(enklere?)}$$

men $a^2 = b^2 \Longleftrightarrow |a| = |b| \Leftrightarrow \begin{matrix} a = b \\ a = -b \end{matrix}$

sjekker hvilke av løsningene til $a^2 = b^2$ er løsning til $a = b$. (Løsningene til $a = -b$ er de "falske løsningene").

Eks a) $(\sqrt{2x-1})^2 = (x-1)^2$

$$2x-1 = x^2-2x+1$$

flytter over

$$x^2-4x+2 = 0$$

$$(x-2)^2-4+2 = 0$$

$$(x-2)^2 = 2$$

$$x-2 = \pm\sqrt{2}$$

$$x = 2\pm\sqrt{2}$$

$x = 3.41$

$x = 0.59$ Falsk.

Setter inn og sjekker:

Løsningen er $\underline{x = 2+\sqrt{2}}$

oppgave

Løs likningen $\sqrt{x} = 2 - x$

Vi kvadrerer begge sider:

③

$$(\sqrt{x})^2 = (2-x)^2$$

$$x = 4 - 4x + x^2$$

så $x^2 - 5x + 4 = 0$

$$(x-4)(x-1) = 0$$

$x = 1$ og $x = 4$

Sjekker om de er løsninger til $\sqrt{x} = 2 - x$:

$x = 1$ $\sqrt{1} = 2 - 1$ ✓

$x = 4$ $\sqrt{4} = 2 \neq 2 - 4 = -2$ Falsk løsning.

Løsning er $\underline{x = 1}$

c) $3+\sqrt{x} = \sqrt{2(x+1)}$

kvadrerer begge sider

(4) $(3+\sqrt{x})^2 = \left(\sqrt{2(x+1)}\right)^2 = 2x+2$

$9 + \underbrace{6\sqrt{x}}_{} + \overset{(\sqrt{x})^2}{x} = 2x+2$

"kryssledd"

$6\sqrt{x} = 2x+2-x-9$

$6\sqrt{x} = x-7$

kvadrerer begge sider

$36x = (x-7)^2 = x^2-14x+49$

$x^2-14x-36x+49 = x^2-50x+49 = 0$

$= (x-49)(x-1) = 0$

$x=1$ eller $x=49$.

sjekker: $x=1$ Falsk $3+\sqrt{1} = 4 \neq \sqrt{2(1+1)} = 2$

$x=49$ $3+\sqrt{49} = 3+7=10$ like

$\sqrt{2(49+1)} = \sqrt{100} = 10$

Løsningen er $\underline{\underline{x=49}}$

polynomer $\qquad x^3 - 2x + 3$ etc

grad 3

polynomdivisjon

5 $\qquad \dfrac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)} \qquad \deg(r) < \deg(q)$

Eks $\qquad x^5 + 2x - 3 : x^3 - 1 = x^2 + \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - 1}$

$$\begin{array}{l} x^5 - x^2 \\ \hline x^2 + 2x - 3 \end{array}$$

$q(x) = x - a \qquad$ grad 1. så graden til restleddet er 0, altså konstant

$$\frac{p(x)}{x-a} = s(x) + \frac{r}{q(x)}$$

$$p(x) = s(x)(x-a) + r$$

setter $x = a$, da får vi

$p(a) = 0 + r$, så $\underline{r = p(a)}$

Hvis $p(a) = 0$, da er $p(x) = s(x)(x-a)$

Det motsatte er også tilfelle (sett $x = a$...)

$$p(a) = 0 \iff p(x) = s(x)(x-a)$$

$(x-a)$ er en faktor i $p(x)$ hvis og bare hvis $p(a) = 0$.

La $p(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

$p(2) = 0$

Faktoriser $p(x)$:

Siden $p(2) = 0$ så er $x-2$ en faktor i $p(x)$

(6) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 : x - 2 = x^2 - x - 6$

$$
\begin{array}{l}
x^3 - 2x^2 \\
\hline
\quad -x^2 - 4x + 12 \\
\quad -x^2 + 2x \\
\hline
\qquad -6x + 12 \\
\qquad -6x + 12 \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x-2)(x^2 - x - 6)$ ser:

$= \underline{(x-2)(x-3)(x+2)}$

eventuelt benytt 2.grads formelen

(7) Forkort $\dfrac{x^3-x+6}{x+2}$ om mulig.

(Er $x+2$ en faktor i x^3-x+6?)

Setter inn -2 : $(-2)^3-(-2)+6=-8+2+6=0$

Utfører polynom divisjon

$$
\begin{array}{l}
x^3-x+6 : x+2 = x^2-2x+3 \\
\underline{x^3+2x^2} \\
-2x^2-x+6 \\
\underline{-2x^2-4x} \\
\quad 3x+6 \\
\quad \underline{3x+6} \\
\qquad 0
\end{array}
$$

Så $\dfrac{x^3-x+6}{x+2} = \underline{x^2-2x+3}$

Forkort om mulig $\dfrac{x^4+2x^2+4x+1}{x^2-x-2}$

$x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$.

$p(x) = x^4+2x^2+4x+1$.

sjekker om $p(-1)$ og $p(2)$ er null:

$p(-1) = 1+2-4+1 = 0$

$p(2) > 0$

så $x+1$ kan deles ut men ikke $x-2$.

(8)

$$x^4+2x^2+4x+1 : x+1 = x^3-x^2+3x+1$$

$$\begin{array}{l}
x^4+x^3 \\
\hline
-x^3+2x^2+4x+1 \\
-x^3-x^2 \\
\hline
3x^2+4x+1 \\
3x^2+3x \\
\hline
x+1 \\
x+1 \\
\hline
0
\end{array}$$

$$\frac{x^4+2x^2+4x+1}{x^2-x-2} = \frac{x^3-x^2+3x+1}{x-2}$$

Mer om doble ulikheter

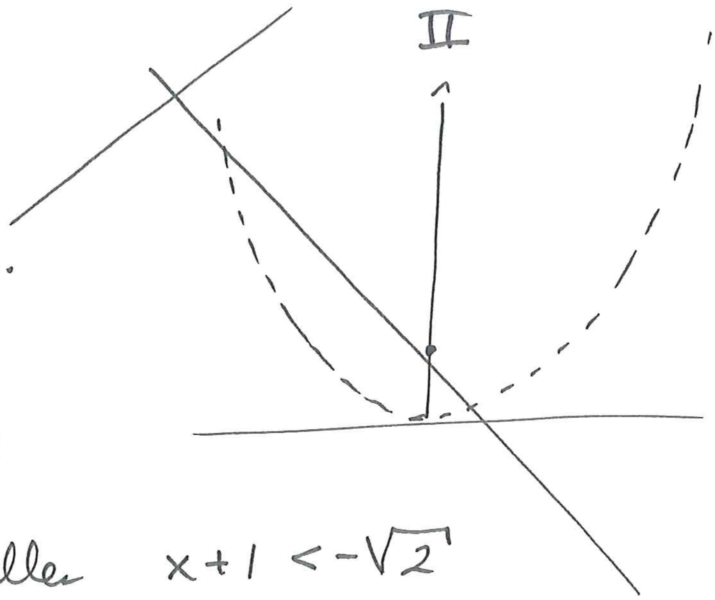
(9)

$$1 - 2x < x^2 \leq x + 12$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 2x < x^2 \quad \underline{\text{og}} \quad x^2 \leq x + 12$$

$$x^2 + 2x - 1 > 0 \quad \text{og} \quad x^2 - x - 12 \leq 0$$

I $\qquad\qquad$ II



I

$$x^2 + 2x - 1 > 0$$

$$(x+1)^2 - 1 - 1 > 0$$

$$(x+1)^2 > 2$$

$$|x+1| > \sqrt{2}$$

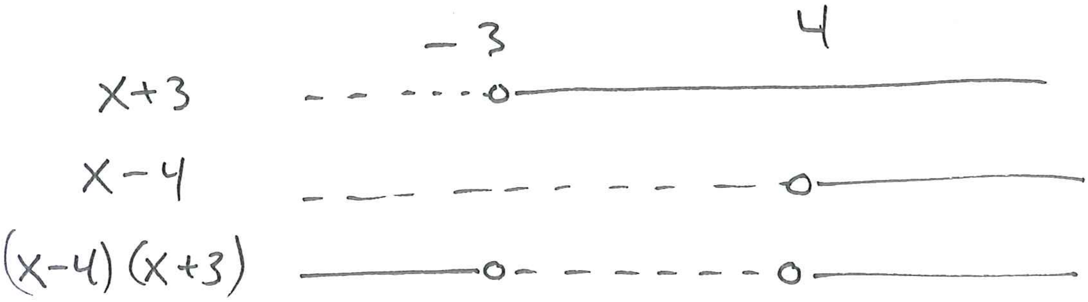
$$\sqrt{2} < x + 1 \quad \text{eller} \quad x + 1 < -\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} - 1 < x \quad \text{eller} \quad x < -1 - \sqrt{2}$$

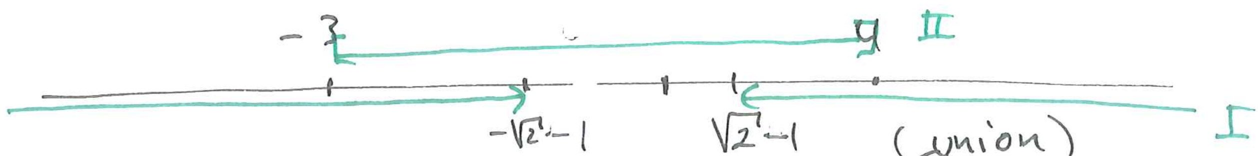
II

$$x^2 - x - 12 \leq 0$$

$$(x-4)(x+3) \leq 0$$



alle x slik at $\quad -3 \leq x \leq 4$



(union)

Løsningen er $\quad \underline{x \in [-3, -\sqrt{2}-1\rangle \cup \langle\sqrt{2}-1, 4]}$