12. sep 2018

Fausl

① Polynomdivisjon

Heltall p, q $\quad q \neq 0$, > 0

$$\frac{p}{q} = s + \frac{r}{q}$$

heltallsdel

ekte brøk

$\underline{0 < r < q}$

Alternativt: $\quad p = s \cdot q + r$

$$\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3} \qquad -\frac{10}{3} = -4 + \frac{2}{3}$$

Tilsvarende for polynomer:

* $$\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1 \quad (x \neq -1)$$

Vi sier at $x+1$ deler x^2-1 med kvotient $x-1$

* $$\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1}$$
$$= x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

—

$$\frac{x^2+2x+4}{x+3} = \frac{x(x+3-3)+2x+4}{x+3}$$
$$= \frac{x(x+3)}{x+3} + \frac{-3x+2x+4}{x+3}$$
$$= x + \frac{-x+4}{x+3} = x + \frac{-(x+3-3)+4}{x+3}$$
$$= x - \frac{x+3}{x+3} + \frac{7}{x+3} = \underline{x - 1 + \frac{7}{x+3}}$$

Polynomer

er på formen

(2) $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Hvis $a_n \neq 0$ sier vi at graden til polynomet (oven for) er n.

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ kalles koeffisientene til polynomet.

* $x^2 - 3x + 15$ polynom av grad 2 (annengrads polynom

* $x^4 - x^5 - 12 + \pi \cdot x^3$ polynom av grad 5

* $x^4 + 13x - 7 - x^4$
  $= 13x - 7$ 1. gradspolynom

* $0 \cdot x^3 + 12x^2 - 13$ 2. gradspolynom

* 0 nullpolynomet

graden til et polynom $p(x)$ betegnes $\underline{\deg(p(x))}$

$\left(x^{-1} = \frac{1}{x} \right.$ ikke et polynom $\left. \right)$

$p(x)$ pol. av grad 0
$p(x)$ er konstant

$p(x) = 0$
kalles en n-te grads-likning.

Gitt Polynomer $p(x), q(x) \neq 0$

Da finnes det polynomer $s(x)$ og $r(x)$
og $\deg(r) < \deg(q)$

slik at $p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x)$

3 alternativt: $\dfrac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}$ ← rest

↑ kvotient

systematisk måte å utføre polynom divisjon

$$p(x) : q(x) = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

$$\vdots$$

$$\overline{\quad r(x) \quad}$$

$\deg r(x) < \deg q(x)$

eks $x^2+2x+4 : x+3 = x - 1 + \dfrac{7}{x+3}$

trekker x(x+3) fra → x^2+3x

$-x+4$

trekker −1(x+3) fra → $-x-3$

7 rest

x ganget med (x+3) gir x^2+3x som har samme ledende ledd som x^2+2x+4 etc.

$$x^2 + 0\cdot x - 1 : x+1 = x-1$$

$$\underline{x^2 + x}$$

(4)

$$-x - 1$$

$$\underline{-x - 1}$$

$$0$$ ingen rest

Rotete! Ha ledd av samme grad ovenfor hverandre

$$x^3+1 : x^2+1 = x + \frac{-x+1}{x^2+1}$$

$$\underline{x^3+x}$$

$-x+1$ ← rest $\qquad \deg(-x+1) < \deg(x^2+1)$

$\qquad\qquad 1 \qquad\qquad 2$

oppgave $\qquad x^2+x+1 : x+2 = \underline{x-1+\frac{3}{x+2}}$

$$\underline{x^2+2x}$$

$$-x+1$$

$$\underline{-x-2}$$

$$3$$

Så $\qquad \dfrac{x^2+x+1}{x+2} = x-1+\dfrac{3}{x+2}$

alternativt $\qquad (x^2+x+1) = (x-1)(x+2)+3$

(5)

$$x^3 : 1-2x^2 = \underline{\frac{-1}{2}x + \frac{(1/2)x}{1-2x^2}}$$

$$\frac{x^3 - \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x} \text{ (rest)}$$

$$x^3+2x+3 \quad : x = x^2+2 + \frac{3}{x}$$

$$\frac{x^3}{2x+3}$$

$$\frac{2x}{3}$$

(enklere $\quad \dfrac{x^3+2x+3}{x} = \dfrac{x^3}{x} + \dfrac{2x}{x} + \dfrac{3}{x}$

$= \underline{x^2 + 2 + 3/x}$)

Anta $\quad q(x) = ax+b \qquad a \neq 0$

lineært polynom $\qquad \deg(q) = 1$

$$\frac{p(x)}{ax+b} = s(x) + \frac{r}{ax+b}$$

r er en konstant siden $\deg(r) < \deg(q) = 1$

$$p(x) = s(x)(ax+b) + r$$

La x_0 være roten til $q(x)$, $\quad q(x_0) = 0$

Setter inn $x = x_0$ og får

(6) $\underline{p(x_0) = r}$

q deler $p \iff r = 0 \iff p(x_0) = 0$

$p = x^3 - 1$

$q = x + 1$

$q(x) = 0$ for $x = -1$

$p(-1) = -1 - 1 = -2$

så $x+1$ deler ikke $x^3 - 1$

(resten blir $\frac{-2}{x+1}$)

$p = x^3 - 1$

$q = x - 1$

$q(x) = 0$ når $x = 1$

$p(1) = 0$ så $x-1$ deler $x^3 - 1$.

Vi finner kvotienten

$$
\begin{array}{l}
x^3 \quad\quad -1 \; : \; x - 1 = x^2 + x + 1 \\
\underline{x^3 - x^2 \quad\quad} \\
\quad x^2 \quad -1 \\
\quad \underline{x^2 - x \quad\quad} \\
\quad\quad\quad x - 1 \\
\quad\quad\quad \underline{x - 1} \\
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

så $\underline{x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1)}$

7. Kan $p(x) = x^4 + x^2 - 2$ deles av $x+1$?

Roten til $x+1$ er $\underline{-1}$
(Løsningen til $x+1=0$)

$$P(-1) = (-1)^4 + (-1)^2 - 2 = 0$$

Så $x+1$ deler x^4+x^2-2

Vi finner kvotienten:

$$p(x) = x^4 + x^2 - 2 \ : \ x+1 = \underline{x^3 - x^2 + 2x - 2}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^4 + x^3} \\
-x^3 + x^2 \quad - 2 \\
\underline{-x^3 - x^2} \\
2x^2 \quad - 2 \\
\underline{2x^2 + 2x} \\
-2x - 2 \\
\underline{-2x - 2} \\
0
\end{array}$$

Så $x^4 + x^2 - 2 = (x^3 - x^2 + 2x - 2)(x+1)$

(I dette tilfellet kan vi løse dette på en enklere måte: $p(x)$ er et kvadratisk uttrykk med variabel x^2. Faktoriser det kvadratiske uttrykket:

$$(x^2+2)(x^2-1) = \underline{(x^2+2)(x+1)(x-1)}$$
)