31.08.2018 Andregradsformelen Fausk

2.grads uttrykk ax^2+bx+c variabel x

2.grads likning $ax^2+bx+c=0$

Andregradsformelen (abc-formelen)

Løsningene er $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2 \cdot a}$

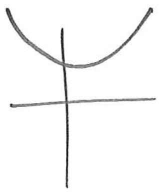
1

$a \neq 0$

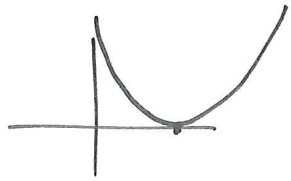
* $b^2-4ac<0$ ingen reelle røtter (løsninger)

ax^2+bx+c kan ikke faktoriseres mer

eks. x^2+1



* $b^2-4ac=0 \iff b^2=4ac$



$x = \dfrac{-b}{2a}$ én rot "dobbelrot"

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

fullstendig kvadrat (ganget med a)

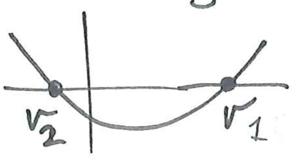
eks $x^2+4x+4=(x+2)^2$

* $b^2-4ac>0$

To løsninger

$x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = r_1$

$x = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = r_2$



Faktorisering ax^2+bx+c
$$= a(x-r_1)(x-r_2)$$

eks $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$ ($r_1=-2$ eller $r_2=-3$ omvendt)

Eksempler

$x^2 + x + 1 = 0$

$a=1 \quad b=1 \quad c=1$

$b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$

$= -3 < 0$

ingen røtter

(2)

$x^2 + x - 1 = 0$

$a=1 \quad b=1 \quad c=-1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{og} \quad x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$a=1 \quad b=5$ og $c=4$

oppgave Finn røttene til $x^2 + 5x + 4$ og faktoriser uttrykket.

Røttene til x^2+5x+4 er løsningene til likningen $x^2 + 5x + 4 = 0$

$a=1 \quad b=5 \quad c=4$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{-5+3}{2} = \underline{-1} \quad \text{og} \quad x = \frac{-5-3}{2} = \frac{-8}{2} = \underline{-4}$$

Faktorisering $(x - (-1))(x - (-4))$

$= (x+1)(x+4)$

$p(x) = x^2 + 3x - 3$ $\quad a=1, b=3, c=-3$

Finn røttene til $p(x)$

(3)

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Røttene $x = \frac{-3+\sqrt{21}}{2}$ og $x = \frac{-3-\sqrt{21}}{2}$

$p(x)$ faktoriseres som $p(x) = \left(x + \frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)\left(x + \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)$

$q(x) = 2x^2 + 3x + 1$ $\quad a=2, b=3$ og $c=1$

Røttene til $q(x)$ er

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}$$

$$= \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$x = \frac{-3-1}{4} = \frac{-4}{4} = \underline{-1} \text{ og } x = \frac{-3+1}{4} = \underline{\frac{-1}{2}}$$

$q(x)$ faktoriserer som

$$2\cdot(x - (-1))(x - (-\tfrac{1}{2}))$$

$$= 2\cdot(x+1)(x+\tfrac{1}{2})$$

$$= \underline{(x+1)(2x+1)}$$

$$a(x) = x^2 + \sqrt{2}\,x - \sqrt{3}$$

$a = 1$
$b = \sqrt{2}$
$c = -\sqrt{3}$

4

Røttene til $a(x)$ er

$$x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\sqrt{3})}}{2 \cdot 1}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 4\sqrt{3}}}{2}}}$$

Løs likningen $5t^2 - 2t = t - 1$

flytter over

$$5t^2 - 2t - t + 1 = 0$$

$$5t^2 - 3t + 1 = 0$$

Løsningene er

$$t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 5}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 20}}{10} = \frac{3 \pm \sqrt{-11}}{10}$$

ingen reelle løsninger.

(burde ha sjekket om $b^2 - 4ac \geq 0$ først!)

$p(z) = z^4 - 3z^2 - \sqrt{2} \quad (=0)$

Hva er røttene?

5 $\quad z^2 = x \qquad z^4 = (z^2)^2 = x^2$

1) $x^2 - 3x - \sqrt{2} = 0$

Løser for x

2) Løser for z hvor $z^2 = x$.

---

1) $$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1(-\sqrt{2})}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}{2}$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{9 + 4\cdot\sqrt{2}}}{2} > 0 \qquad x = \frac{3 - \sqrt{9 + 4\cdot\sqrt{2}}}{2} < 0$$

2) $$z^2 = \frac{3 + \sqrt{9 + 4\cdot\sqrt{2}}}{2}$$

z^2 "ingen løsning"

$$z = \pm\sqrt{\frac{3 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}{2}}.$$

$b = 0$

$$\frac{0 \pm \sqrt{0 - 4ac}}{2a} = \pm\frac{\sqrt{-4ac}}{2a}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

alternativt: $\quad ax^2 + c = 0$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$\sqrt{x^2} = |x| = \sqrt{\frac{-c}{a}}$ så $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$.

$c = 0$ $\qquad ax^2 + bx$

abc-formel

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 0}}{2a} = \frac{-b \pm |b|}{2a}$$

6

$x = 0$ og $x = -b/a$.

Alternativt:

$$ax^2 + bx = 0$$
$$x(ax + b) = 0$$

$x = 0$ eller $ax + b = 0$

så løsningene er $x = 0$ og $x = -b/a$.

Når $b = 0$ eller $c = 0$ er det enklest og mest naturlig å løse $ax^2 + bx + c = 0$ uten bruk av abc-formelen.

7

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x}_{\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right)} + \frac{c}{a} = 0$$

fullstendig kvadrat   konstant ledd

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

"vi fullfører kvadratet".

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$$

(flytter $\frac{b}{2a}$ over til høyre side)

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vi har synt abc-formelen.

(8)

abc-formelen (kvadratformelen) når $a = 1$

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + \underbrace{\frac{b}{2}x + x \cdot \frac{b}{2}}_{2\frac{b}{2}x} + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

(Fullstendig kvadrat med leddene x^2 og bx)

$$= x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

settes inn i $x^2 + bx + c$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$

andre siden

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}$$

$$\left|x + \frac{b}{2}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$x + \frac{b}{2} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4\cancel{a}c}}{2}$$

$$x = \frac{-b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Løs likning

9

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 0$$

Felles nevner er $x(x-1)(x+1)$

$$\frac{(x-1)(x+1) + x(x+1) + x(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = 0$$

$$\frac{x^2-1 + x^2+x + x^2-x}{x(x-1)(x+1)} = 0$$

$$\frac{3x^2-1}{\sim} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad 3x^2-1=0$ (når nevneren er ulik 0)

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \underline{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}}$$