Innlevering	Matematikk forkurs OsloMet
	Obligatorisk innlevering 7
Innleveringsfrist	Onsdag 11. april 2018 kl. 14:30
Antall oppgaver:	8

1

a) Løs likningenen $3^{2x-1} = 6$.

LF: Vi tar logaritme på begge sider og får

$$(2x-1)\ln(3) = \ln(3^{2x-1}) = \ln 6$$

Vi deler begge sider med $\ln(3)$ og løser ut for x

$$\underline{x = \frac{1}{2}\left(\frac{\ln 6}{\ln 3} + 1\right)}$$

b) Løs den doble ulikheten $-4 < 3x + 5 \leq 2/x$.

LF: Den første ulikheten gir $(-4-5) < 3x$ så $-3 < x$.

Den andre ulikheten kan vi løse ved å samle alle leddene på venstre side av ulikheten og skrive uttrykket som et rasjonelt uttrykk:

$$\frac{3x^2 + 5x - 2}{x} = 3x + 5 - 2/x \leq 0$$

Telleren faktoriserer som $(3x-1)(x+2)$ (dette kan du se ved å finne røttene etc.) Den andre ulikheten er derfor ekvivalent til

$$\frac{(3x-1)(x+2)}{x} \leq 0$$

Hver av faktorene er lineære uttrykk i x. Vi finner ut når hver av uttrykkene er positive eller negative og bruker det til å bestemme når den rasjonale funksjonen er negativ. Dette kan for eksempel gjøres med et fortegnsskjema. Resultatet er

$3x - 1 \geq 0$ presis når $x \geq 1/3$.

$x + 2 \geq 0$ presis når $x \geq -2$.

$x \geq 0$ presis når $x \geq 0$.

Den andre ulikheten er oppfylt presis når $x \leq -2$ og når $0 < x \leq 1/3$. Uttrykket gir ikke mening for $x = 0$. Den dobble ulikheten er oppfylt når begge ulikhetene er oppfylt. Løsningen er derfor

$$\underline{x \in \langle -3, -2] \cup \langle 0, 1/3]}$$

c) Løs likningen $2\sin^2(t) = \sin(t) + 1$ eksakt for $t \in [0, 2\pi\rangle$.

LF: Dette er en kvadratisk likning i variabel $\sin(t)$. Vi løser for $\sin(t)$ og finner deretter mulige løsninger for t.

$$2\sin^2(t) - \sin(t) - 1 = (2\sin(t) + 1)(\sin(t) - 1) = 0$$

presis når $\sin(t) = 1$ eller når $\sin(t) = -1/2$. I det oppgitte intervallet er $\sin(t) = 1$ når $t = \pi/2$ og $\sin(t) = -1/2$ når $t = 7\pi/6$ og $t = 11\pi/6$. En enhetssirkel kan hjelpe med å finne disse løsningene. Løsningenen er derfor mengden

$$\underline{\{\pi/2, 7\pi/6, 11\pi/6\}}$$

d) Løs likningenen $\ln(|x-1|) = \ln(x^2-1) - 1$.

LF: Vi har at $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$. Vi flytter alle ledd over til høyre side av likhetstegnet: $0 = \ln(x^2-1) - \ln(|x-1|) - 1$.

Når $x > 1$ har vi

$$\ln(x^2-1)-\ln(x-1)-1 = \ln(x+1)+\ln(x-1)-\ln(x-1)-1 = \ln(x+1)-1 = 0$$

Dette gir $x + 1 = e^1 = e$ og $x = e - 1$.

Når $x < -1$ (høyresiden er ikkje definert i intervallet $[-1, 1]$) har vi

$$\ln(x^2-1)-\ln(1-x)-1 = \ln(-x-1)+\ln(1-x)-\ln(1-x)-1 = \ln(-x-1)-1 = 0$$

Dette gir at $-x - 1 = e$ så $x = -(e + 1)$. Løsningene er derfor

$$\underline{x = -(e+1) \text{ og } x = e-1}$$

e) Løs ulikheten $\dfrac{2}{x-1} < \dfrac{5-2x}{2-x}$.

LF: Vi samler begge ledd på høyresiden og finner felles nevner

$$0 < \frac{5-2x}{2-x} - \frac{2}{x-1} = \frac{(5-2x)(x-1) - 2(2-x)}{(x-1)(2-x)} = \frac{-2x^2+9x-9}{(x-1)(2-x)}$$

Vi faktoriserer telleren ved for eksempel å finne røttene til polynomet. Resultatet er

$$\frac{(2x-3)(3-x)}{(x-1)(2-x)} = \frac{(2x-3)(x-3)}{(x-1)(x-2))} > 0$$

Vi kan nå finne fortegnet til hver av faktorene og sjekke når produktet er definert og positivt. Resultatet er

$$\underline{x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 3/2, 2\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle}\}$$

f) Løs likningen $\sqrt{x+5} = 5 - 2x$.

LF: Dette er en irrasjonal likning. Vi kvadrer begge sider. Alle løsninger til den opprinnelige likningen er da også løsninget til likningen

$$x + 5 = (5 - 2x)^2$$

Vi løser denne kvadratiske likingen og sjekker så hvilke av løsningene som er løsninger til den irrasjonale likningen.

Etter at vi ganger ut kvadratet og samler alle ledd på en side får vi

$$4x^2 - 20x + 25 - x - 5 = 4x^2 - 21x + 20 = 0$$

Løsningene er

$$\frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 4 \cdot 4 \cdot 20}}{2 \cdot 4} = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 320}}{8} = \frac{21 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{21 \pm 11}{8}$$

Dette gir $x = 4$ og $x = 5/4$. Vi sjekker at $x = 4$ er en falsk løsning og at $x = 5/4$ er en ekte løsning.

$$\sqrt{4+5} = 3 = -(5 - 2 \cdot 4) \text{ og } \sqrt{5/4 + 5} = \sqrt{25/4} = 5/2 = 5 - 5/2$$

Løsningen er $\underline{x = 5/4 = 1.25}$.

2

Løs følgende initialverdiproblemer

a) $y'(x) = 4x/(y(x))^2$ hvor $y(2) = 3$.

LF: Dette er en separabel differensiallikning. Ganger vi med y^2 på begge sider av likhetstegnet får vi

$$y^2 y' = 4x$$

Denne differensiallikningen er ekvivalent til den første når y er ulik null. Siden funksjonene på hver side av likhetstegnet skal være like må også klassene av antideriverte være like. Vi benytter variabelbytte (substitusjon) og får

$$\int y^2 y' \, dx = \int y^2 \, dy = y^3/3 + C_1$$

og

$$\int 4x \, dx = 2x^2 + C_2$$

Siden disse klassene av funksjoner er like må

$$y^3/3 = 2x^2 + C$$

(hvor $C = C_2 - C_1$). Når $x = 2$ skal y være lik 3. Vi setter inn og løser for C.

$$3^3/3 = 9 = 2 \cdot 2^2 + C = 8 + C$$

Derfor er $C = 9 - 8 = 1$. Den implisitte beskrivelsen av y som tilfredstilller initialkravet er derfor

$$y^3/3 = 2x^2 + 1$$

For å uttrykke y som en funksjon av x ganger vi først med tre og deretter tar vi tredjeroten på begge sider av likhetstegnet

$$\underline{y(x) = \sqrt[3]{6x^2 + 3}}$$

Denne funksjonen er alltid ulik null så den er en løsning til den opprinnelige differensiallikningen for alle x.

De følgende deloppgavene løser vi mindre detaljert.

b) $y'(x)(x^2 - 9) = 2 - 3x$ hvor $y(0) = 0$.

LF: Dette er en separabel differensiallikning. Faktisk er det bare et spørsmål om å finne en antiderivert

$$y'(x) = \frac{2 - 3x}{x^2 - 9}$$

Nevneren faktoriseres som $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$. Vi benytter delbrøksoppspalting til å skrive funksjonsuttrykket på høyre side som en sum

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3}$$

Finner vi felles nevner og sammenligner tellerne får vi

$$A(x-3) + B(x+3) = 2 - 3x$$

for alle x ulik ± 3. Siden to polynomer som tar like verdier i et større antall punkt enn gradene deres må være identisk like, gjelder likheten for alle x. Setter vi $x = 3$ gir det $6B = 2 - 9 = -7$, så $B = -7/6$. Tilsvarende gir $x = -3$ at $-6A = 11$, så $A = -11/6$. Lineær substitusjon gir

$$y(x) = \int \frac{-1}{6}\left(\frac{11}{x+3} + \frac{7}{x-3}\right) dx = \frac{-1}{6}\left(11 \ln|x+3| + 7 \ln|x-3|\right) + C$$

Initialbetingelsen er $y(0) = 0$. Setter vi $x = 0$ og $y = 0$ og løser for C får vi

$$0 = -(11 \ln 3 + 7 \ln 3)/6 + C = -3 \ln 3 + C$$

Vi har at $C = 3 \ln 3$. Setter vi inn C finner vi løsningen til initialverdiproblemet

$$\underline{y(x) = \frac{-\left(11 \ln|x+3| + 7 \ln|x-3|\right)}{6} + 3 \ln 3}$$

c) $y''(t) + 16y = 0$ hvor $y(0) = -2$ og $y'(0) = 4$.

LF: Vi vet at løsningene er på formen

$$y(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

Setter vi inn uttrykket i differensiallikningen får vi $k^2 + 16 = 0$. Dette gir $k = \pm 4$. Endring i fortegn til k svarer til at A skifter fortegn og B er uendra. Vi benytter derfor bare $k = 4$. Vi løser for A og B slik at løsningen tilfredstiller initialkravene gitt: $y(0) = B = -2$ og $y'(0) = 4A\cos(4x) - 4B\sin(4x)|_{x=0} = 4A = 4$. Så $B = -2$ og $A = 1$.

Dette gir

$$\underline{y(x) = \sin(4x) - 2\cos(4x)}$$

d) $y'(t)(x^2-4)=(y^2+2y+1)x$ hvor $y(\sqrt{5})=0$.

LF: Dette er også en separabel differensiallikning

$$\frac{y'}{y^2+2y+1}=\frac{x}{x^2-4}$$

Vi integrer med hensyn til x og benytter variabelskifte

$$\int \frac{1}{y^2+2y+1}\,dy=\int \frac{x}{x^2-4}\,dx$$

Nevneren i uttrykket til venstre faktoriserer som $(y+1)^2$. En lineær substitusjon med $u=y+1$ gir at

$$\int \frac{1}{y^2+2y+1}\,dy=\int \frac{1}{(y+1)^2}\,dy=\frac{-1}{y+1}+C_1$$

Substitusjonen $v=x^2-4$ gir $v'=2x$, så $x\,dx=\frac{1}{2}\,dv$

$$\int \frac{x}{x^2-4}\,dx=\int \frac{1/2}{v}\,dv=(1/2)\ln|x^2-4|+C_2$$

Siden disse to ubestemte integralene skal være like (bestemme samme klasse av funksjoner) så må

$$\frac{-1}{y+1}=(1/2)\ln|x^2-4|+C$$

Initialkravet $y(\sqrt{5})=0$ gir $-1=(1/2)\ln|5-4|+C=C$. Nå uttrykker vi y som en funksjon av x.

$$\underline{y(x)=\frac{-1}{(1/2)\ln|x^2-4|+1}-1}$$

e) $y'(x)=e^{2x}\cos(3x)$ hvor $y(0)=1$.

LF: Dette er en separabel differensiallikning. Funksjonen $y(x)$ er en antiderivert til $e^{2x}\cos(3x)$. Vi forsøker med delbrøksoppspalting to ganger. Dette vil gi oss det opprinnelige integralet tilbake igjen, nå med en koeffisient ulik 1. Vi tar antiderivert til e^{2x} i hver anvendelse av delvis integrasjon

$$y(x)=\int e^{2x}\cos(3x)\,dx=\frac{e^{2x}}{2}\cos(3x)-\int\frac{e^{2x}}{2}(-3\sin(3x))\,dx=$$
$$\frac{e^{2x}}{2}\cos(3x)-\left[\frac{e^{2x}}{4}(-3\sin(3x))-\int\frac{e^{2x}}{4}(-9\cos(3x))\right]$$

Samler vi integralene over på venstre side får vi

$$\int e^{2x}\cos(3x)\,dx+\frac{9}{4}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx=\frac{e^{2x}}{2}\cos(3x)+\frac{3e^{2x}\sin(3x)}{4}+C$$

Ganger vi med $4/13$ på begge sider får vi

$$y(x)=\int e^{2x}\cos(3x)\,dx=\frac{e^{2x}}{13}\,(2\cos(3x)+3\sin(3x))+C$$

Initialkravet $y(0)=1$ gir $1=2/13+C$ så $C=11/13$. Løsningen er derfor

$$\underline{y(x)=\int e^{2x}\cos(3x)\,dx=\frac{e^{2x}}{13}\,(2\cos(3x)+3\sin(3x))+\frac{11}{13}}$$

3

a) Finn volumet til omdreingslegemet som fremkommer ved å rotere grafen til $f(x) = \sin(x)$, fra $x = 0$ til $x = \pi$, om x-aksen.

LF: Vi benytter diskmetoden og får at volumet er lik

$$\int_0^{\pi} \pi(f(x))^2\,dx = \pi\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx$$

VI kan finne integralet ved å observere at $\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx$ siden integralet er over en halv periode. Dette gir ved Pytaros sin sats, $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$ for alle x, følgende

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx + \int_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 1\,dx = \pi/2$$

Volumet er derfor lik $\underline{\pi^2/2}$.

Alternativt kan vi finne den antideriverte

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1-\sin(x)\cos(x)}{2} + C$$

og bruke den til å evaluere det bestemte integralet.

b) Toricellis lov er en differnsiallikning som beskriver væske høyden (fra bunnen) som en funksjon av tiden når væsken renner ut av en beholder under ideelle forhold. Torricellis lov sier at høyden $h(t)$ oppfyller differensiallikningen

$$h'(t)A(h) = -a\sqrt{2gh(t)}$$

hvor $A(h)$ er tverrsnittarealet ved høyden h fra bunnen, a er arealet på åpningen der væsken renner ut, g er gravitasjonskonstanten.

Ved tiden $t = 0$ er høyden H. Hva er væskehøyden ved tiden når beholderen har et tverrsnittareal gitt ved $A(h) = \pi(2+\sqrt{h})^2$. Bunnen til beholdren er i $h = 0$.

LF: Vi setter inn uttrykket for $A(h)$ og får

$$\frac{(2+\sqrt{h})^2}{\sqrt{h}}h'(t) = \frac{-a\sqrt{2g}}{\pi}$$

Vi benytter substitusjonen $u(t) = \sqrt{h(t)}$. Kjerneregelen gir at $u'(t) = \dfrac{h'(t)}{2\sqrt{h(t)}}$. Som en differensiallikning i u får vi

$$2(2+u)^2u'(t) = \frac{-a\sqrt{2g}}{\pi}$$

Integrasjon med hensyn til t gir

$$\frac{2}{3}(2+u)^3 = C + \frac{-a\sqrt{2g}}{\pi}t$$

Setter vi $t = 0$ får vi

$$C = \frac{2}{3}(2 + \sqrt{H})^3$$

Vi ganger med 3/2 og tar tredjeroten på begge sider av likhetstegnet

$$(2 + u) = \left(\frac{3}{2}\left(C + \frac{-a\sqrt{2g}}{\pi}t\right)\right)^{1/3}$$

Derfor er

$$h(t) = \left(\left(\frac{3}{2}\left(C + \frac{-a\sqrt{2g}}{\pi}t\right)\right)^{1/3} - 2\right)^2$$

Setter vi inn for C får vi

$$h(t) = \left(\left((2 + \sqrt{H})^3 + \frac{-3a\sqrt{2g}}{2\pi}t\right)^{1/3} - 2\right)^2$$

4

En trekant ABC har hjørner $A(0,1,2)$, $B(3,1,3)$ og $C(1,0,-2)$.

Vi finner først noen vektorer. Vektorene mellom punktene A, B og C er

$$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = [3,1,3] - [0,1,2] = [3,0,1]$$

og tilsvarende

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = [1,-1,-4] \qquad \text{og} \qquad \vec{a} = \overrightarrow{BC} = [-2,-1,-5]$$

En normalvektor til trekanten er gitt ved kryssproduktet av to vektorer i planet. Vi velger vektorene $\vec{c}$ og $\vec{b}$.

$$\vec{n} = \vec{c} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = [1, 13, -3]$$

a) Finn arealet til trekanten.

LF: Arealet er lik

$$A = \frac{1}{2}|\vec{c} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}|[1,13,-3]| = \underline{\sqrt{179}/2} \simeq 6.69$$

b) Gi en parametrisering av planet som trekanten ligger i.

LF: En parametrisering av planet er gitt ved alle punkt $P(x,y,z)$ slik at

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\vec{c} + t\vec{b}$$

$$\begin{aligned} x &= 3s + t \\ y &= 1 - t \\ x &= 2 + s - 4t \end{aligned}$$

Eg gir også en alternativ beskrivelse av planet med en likning:

Planet består av alle $P(x,y,z)$ slik at vektoren $\overrightarrow{AP} = [x, y-1, z-2]$ står vinkelrett på planet.

$$[1, 13, -3] \bullet [x, y-1, z-2] = 0$$

En likning for planet er derfor

$$x + 13y - 3z = 19$$

c) Finn lengden på sidene i trekanten og finn vinkel A.

LF: Lengdene er

$$|\overrightarrow{AB}| = |[3, 0, 1| = \sqrt{10} \simeq 3.162$$
$$|\overrightarrow{AC}| = |[1, -1, -4]| = \sqrt{18} = \sqrt{2} \cdot 3 \simeq 4.242$$
$$|\overrightarrow{BC}| = |[-2, -1, -5]| = \sqrt{30} \simeq 5.477$$

Vinkel A er regner vi ut ved å benytte skalarproduktet

$$\cos(\angle A) = \frac{\overrightarrow{c} \bullet \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{c}| \cdot |\overrightarrow{b}|} = \frac{-1}{\sqrt{10}\sqrt{18}} = \frac{-1}{6\sqrt{5}} \simeq -0.07453$$

Dette gir at vinkel A er lik $\underline{\angle A = -0.074538 \text{ rad} \simeq 94.274^\circ}$.

d) Vi lager et tetraeder ved å knytte de tre punktene A, B og C til et fjernde punkt $D(1, 2, 3)$. Finn volumet til tetraederet. Hva er høyden fra planet hvor trekanten ABC ligger til punktet D?

LF: Vi finner først vektoren $\overrightarrow{AD} = [1, 2, 3] - [0, 1, 2] = [1, 1, 1]$. Volumet til tetraederet er gitt som tallverdien til en seksdel av trippelproduktet

$$V = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{6} \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{n} \right| = \underline{\frac{11}{6}}$$

Høyden ganget med arealet til grunnflaten delt på tre er lik volumet til pyramiden. Derfor er høyden lik

$$3V/A = (11/2)/(\sqrt{179}/2) = \underline{11/\sqrt{179} \simeq 0.82217}$$

e) For hvilken skalar t er vektoren $\overrightarrow{AB} - t\overrightarrow{AC}$ kortest mulig?

LF: Vektoren er kortes mulig når vektoren står vinkelrett på $\overrightarrow{AC}$. Dette skjer presis når skalarproduktet deres er null

$$(\overrightarrow{AB} - t\overrightarrow{AC}) \bullet \overrightarrow{AC} = 0$$

Vi får derfor at vektoren er kortes når

$$\underline{t = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2} = \frac{-1}{18}}$$

5

a) Finn summen til den uendelige geometriske rekken (hvis den eksisterer)

$$6 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + - \cdots$$

LF: Ledd i er $(-1)^n \cdot 6/3^i$ og summen er over alle $i \geq 0$. Rekken konvergerer derfor og summen er lik

$$6 \cdot \frac{1}{1 + 1/3} = 6/(4/3) = \underline{9/2 = 4.5}$$

b) Finn summen av dei første 100 tallene som ikkje er delelige med 3.

LF: Vi skal finne summen av dei første 100 tallene som ikke er delelige på tre. Eg går utifra at det menes naturlige tall. (0 er delelig med 3 så det blir ikkje et spørsmål om vi skal starte med 0 eller 1...) Tallene er $1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \ldots$

Vi velger å ta summen ved å summere tall på formen $1 + 3n$ og $2 + 3n$ fra $n = 0$. Dei 100 første tall på denne form får vi ved å ta summe fra $n = 0$ til og med $n = 49$. Alternativt kunne vi ha tatt summen over n fra 1 til 150 og så trekt fra summen av $3n$ fra 1 til 50.

$$\sum_{n=0}^{49}(1 + 3n) + \sum_{n=0}^{49}(2 + 3n) =$$

$$\sum_{n=0}^{49}(1 + 2) + \sum_{n=0}^{49}(3n + 3n) = 50 \cdot 3 + 6 \cdot \frac{50 \cdot 49}{2} =$$

$$3(50 + 50 \cdot 49) = 3 \cdot 50^2 = 3 \cdot 2500 = \underline{7500}$$

c) Vi ser på to rekker hvor vi stokker om på rekkefølgen til leddene. Her er den første rekken

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Rekken består av bolker av n kopier av $1/n$ etterfulgt av n kopier av $-1/n$ for $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Vi stokker om på rekkefølgen til tallene i rekken slik at i hver bolk av $1/n$ og $-1/n$ så kommer disse to tallene annenhver gang

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots$$

Avgjør om hver av rekkene konvergerer. Hvis de konvergerer finn også summen til rekken.

LF: Den første rekken divergerer. Vi kan finne delsummer med vilkårlig mange ledd som har både verdien 1 og verdien 0. Rekken kan derfor ikkje konvergere (delsummene må da etter hvert nærme seg ett tall).

Den andre rekken konvergerer. Hvis vi har tatt en delsum helt ut til ledd av typen $1/n$ så vil delsummene svinge mellom $1/n$, eller en mindre positiv verdi, og 0. Derfor vil delsummene etter hvert nærme seg 0 og rekken konvergerer mot 0.

Vi ser av dette at rekkefølgen på leddene i en rekke er avgjørende for om rekken konvergerer og hva den konvergerer til. Ved å stokke litt mer om på rekkefølgen av leddene kan dere faktisk lage rekker som vil konvergerer mot et hvilket som helst tall.

d) Vis at hvis en rekke $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$ konvergerer da må leddene x_n i rekken gå mot null når n går mot uendelig. Gi eksempel på at det er nødvendig krav for at en rekke skal konvergere, men ikkje tilstrekkelig. Med andre ord gi et eksempel på en rekke hvor leddene går mot null, men hvor rekken ikkje konvergerer.

LF: Vi har i del c sett det finnes rekker hvor ledd n går mot null selv om rekken ikkje konvergerer. Et annet eksempel er den harmoniske rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

som divergerer selv om leddene går mot null.

La oss anta at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergerer. Det vil si at følgen av delsummer

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} x_n$$

konvergerer til en sum S. spesielt vil da $S_{N+1} - S_N = x_N$ konvergere mot 0 når n går mot uendelig. Dette viser at hvis en rekke konvergerer da må leddene x_n gå mot null når n går mot uendelig.

e) Bestem for hvilke x den geometriske rekken

$$\cos(x)/2 + \cos^2(x) + 2\cos^3(x) + \cdots$$

konvergerer. Finn summen til rekken når den konvergerer.

LF: Kvotienten i den geometriske rekken er $2\cos(x)$. Så den geometriske rekken konvergerer presis når $|\cos(x)| < 1/2$.

Vi bestemmer x slik at dette er oppfylt for x i et omløp fra 0 til 2π. Vi ser av enhetssirkelen og den kjente verdien til $\arccos(1/2) = \pi/3$ at løsningene er

$$\underline{x \in \langle \pi/3, 2\pi/3\rangle \cup \langle 4\pi/3, 5\pi/3\rangle}$$

Hvis vi ønsker alle verdier av x legger forskyver vi intervallene ovenfor med heltallsmultipler av perioden til cos som er 2π.

Når rekken konvergerer er summen lik

$$\frac{\cos(x)}{2} \cdot \frac{1}{1 - 2\cos(x)} = \underline{\frac{\cos(x)}{2(1 - 2\cos(x))}}$$

6

Finn punktet på parabelen $y = x^2$ som er nærmest mulig punktet $(1, 2)$.

LF: Avstanden fra punktet $(1, 2)$ til punktet (x, x^2) på kurven er

$$\sqrt{(x-1)^2 + (x^2-2)^2}.$$

Denne avstanden er minst når kvadrat av avstanden er minst. Vi minimerer kvadratet av avstandsfunksjonen siden det er et enklere uttrykk. Det er

$$(x-1)^2 + (x^2-2)^2 = x^2 - 2x + 1 + x^4 - 4x^2 + 4 = x^4 - 3x^2 - 2x + 5.$$

Dette er deriverbart for alle x og den deriverte er lik

$$4x^3 - 6x - 2 = 2(2x^3 - 3x - 1).$$

En rot er $x = -1$. Derfor er $x + 1$ en faktor. Vi utfører polynomdivisjon og får

$$2(2x^3 - 3x - 1) = 2(x+1)(2x^2 - 2x - 1).$$

Den deriverte er derfor lik 0 når $x = -1$, $x = (1 + \sqrt{3})/2$ og $x = (1 - \sqrt{3})/2$.

Siden avstanden blir vilkårlig stor når $|x|$ vokser vil avstanden være minst for x lik en av dei tre verdien ovenfor. Vi sjekker og ser at avstanden er kortest når $\underline{x = (1 + \sqrt{3})/2 \approx 1.366}$. Avstanden er da tilnærmet lik $\underline{0.38977}$.

7

Vi skal studere alle tall med fire siffer. Siffrene er $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ og 9 og første siffer behøver ikkje være ulik 0.

a) Hvor mange forskjellige firesifra tall er det.

LF: Det er $10^4 = 1000$ ulike firesifra tall. Dette er åpenbart fordi slike tall nettopp gir alle tall mellom 0 (som 0000) til og med 9999. Dette svarer til ordna utvalg med tilbakelegging.

b) Hvor mange firesiffra tall består av 4 ulike siffer?

LF: Det første siffer kan velges fritt blant de ti, det neste siffer velges blant de ni resterende, deretter blant de åtte resterende tallene og til sist blant de sju resterenede tallene. Det er totalt

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \underline{5040}$$

slike tall. Så rett over halvparten av alle firesifra tall har bare ulike siffer. Dette svarer til ordna utvalg uten tilbakelegging.

c) Hvor mange firesiffra tall er det hvor presis to av siffrene er like? For eksempel 2545 er et slikt tall.

LF: Dette er litt vanskeligere å finne. La oss plassere de to like sifferene først. Det er 10 ulike valg for verdien deres. Det er $\binom{4}{2}$ ulike plasseringer av dem i et tall med fire siffer. For hver av disse plasseringene er det to plasser igjen og der er det $9 \cdot 8$ ulike muligheter å velge tall. (Vi velger først tallet som skal være i ledig plass lengst til venstre, deretter det resterende sifferet.) Totalt er det

$$10 \cdot \binom{4}{2} \cdot 9 \cdot 8 = 10 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 8 = \underline{4320}$$

tall med presis to av siffrene like.

d) Hvor mange firesiffra tall er det hvor siffrene er slik at presis to og to av dem er like (men innbyrdes forskjellige)? For eksempel 2552 er et slikt tall.

LF: Vi kan først velge ett tall og plassere de i to kopier blant 4 siffer. Det er da $10 \cdot \binom{4}{2}$ ulike muligheter. Dei resterende to plassene skal fylles med et annet tall enn det første. Det er da 9 valg. Vi kan ikkje skille mellom de to parene. Så om vi først velger 4 og plasserer de i de to første siffrene og så velger 5 og plasserer de i de to siste plassene, så kan ikkje de skilles fra å først velge 5 og plassere dem i de to siste siffrene og siden velge 4. Derfor forekommer hvert mulighet to ganger ved denne prossedyren. Ved å dele med 2 får vi at antall mulige tall med to parvis forskjellige siffer er

$$10 \cdot \binom{4}{2} \cdot 9/2 = 10 \cdot 6 \cdot 9/2 = 10 \cdot 3 \cdot 9 = \underline{270}$$

La oss regne ut de resterende mulighetene også.

Antall tall med presis tre like siffer er $10 \cdot 9 \cdot 4 = 360$. Dette er flere enn antall tall med to parvis like siffer.

Fire like siffer er det 10 ulike tall med fire siffer som har.

Totalt er dette

$$5040 + 4320 + 270 + 360 + 10 = 10000$$

som forventet.

8

I en klasse er det 20 gutter og 5 jenter. Anta at 2 av jenten og at 12 av guttene tar faget biologi. Vi velger ut én tilfeldig elev.

a) Hva er sannsynligheten for at eleven vi velger tar faget biologi?

LF: Vi lager til tre hendelser: G elvene er en gutt, J elvene er en jente, B elvene tar biologi.

Totalt er det 25 elever. Av dem er det 14 som tar biologi. Sannsynligheten at en tilfeldig valgt elven tar biologi er derfor $\underline{P(B) = 14/25 = 56\%}$.

b) Hva er sannsyligheten at personen vi velger er en gutt som ikkje tar biologi?

LF: Det er 8 gutter som ikkje tar biologi. Sannsynligheten for at den utvalge eleven er blant disser er derfor $\underline{P(G \cap \overline{B}) = 8/25 = 8/25 = 32\%}$.

c) Anta personen vi velger er en gutt. Hva er da sannsynligheten for at personen tar biologi?

Vi vet nå at personen som er valgt er en gutt. Sannsynligheten for at han tar biologi er derfor den betinga sannsynligheten

$$P(B|G) = \frac{P(G \cap B)}{P(G)}$$

Vi har at $P(G) = 20/25 = 4/5$ og $P(G \cap B) = 12/25$. Derfor blir sannsynlighten for at den utvalgte gutten tar biologi lik $\underline{\frac{12/25}{4/5} = 3/5 = 60\%}$

d) Anta personen vi velger tar biologi. Hva er da sannsynlighten for at personen er en gutt?

Dette blir den betinga sannsynlighten $P(G|B)$. Vi kan benytte Bayes setning (side 760) og del c. Vi velger å regne det ut direkte.

$$\underline{P(G|B) = \frac{P(G \cap B)}{P(B)} = \frac{12/25}{14/25} = \frac{6}{7} \simeq 85.7\%}$$