Innlevering	Matematikk forkurs HIOA
	Obligatorisk innlevering 3
Innleveringsfrist	Onsdag 15. november 2017 kl 14:30
Antall oppgaver:	8

1

Deriver følgende funksjoner

a) $(2-x)^2$

b) $\dfrac{2}{(3-5x)^6}$

c) $2x\sqrt{x+3}$

d) $x\ln|x| - x$

e) $\ln\sqrt{1+x^2}$

LF:

a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2-x)^2 = 2(2-x)\cdot(2-x)' = \underline{-2(2-x)}$$

b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{2}{(3-5x)^6} = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3-5x)^{-6} = -12(3-5x)^{-7}(3-5x)' = \underline{\frac{60}{(3-5x)^7}}$$

c)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2x\sqrt{x+3} = 2\left[x'\sqrt{x+3} + x(\sqrt{x+3})'\right] = 2\left[\sqrt{x+3} + x\left(\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right)\right] =$$

$$2\left[\frac{\sqrt{x+3}^2}{\sqrt{x+3}} + x\left(\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right)\right] = \frac{2(x+3)+x}{\sqrt{x+3}} = \frac{3x+6}{\sqrt{x+3}} = \underline{\frac{3(x+2)}{\sqrt{x+3}}}$$

d)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\ln|x| - x\right) = x'\ln|x| + x(\ln|x|)' - x' = \ln|x| + x\cdot(1/x) - 1 = \underline{\ln|x|}$$

e)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\sqrt{1+x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \underline{\frac{x}{1+x^2}}$$

2

Løs likningene. Sjekk gjerne at svarene dere får faktisk er løsninger. (Sette inn løsningene og sjekke at dere faktisk får det samme på begge sider av likhetstegnene.)

a) $4^x = 37^x$

b) $\log x = \ln x + 2$ (to forksjellige logaritmer)

c) $3^{2x} = \ln(5)$

d) $\ln(x+1) - \ln(x-1) = 1$

LF:

a) Vi anvender ln på begges sider av likhetstegnet. LIkningen er ekvivalent til $\ln 4^x = \ln 37^x$. Dette er ekvivalent til $x(\ln(37) - \ln(4)) = 0$. Dette er oppfylt presis når $x = 0$. Løsningen er $\underline{x = 0}$. Alternativt kan vi ta kvotienten av de to sidenen av likhtetstegnet (de er alltid ulik null) og får $(37/4)^x = 1$. Løsningen må da være $x = 0$.

b) Vi i benytter at $\log(x) = \ln(x)/\ln(10)$. Likningen er derfor ekvivalent til

$$\frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \ln(x) + 2$$

etc. Vi viser en annen fremgangsmåte. Opphøy 10 i uttrykkene på hver side av likhetstegnet. Det gir at likningen er ekvivalent til

$$x = 10^{\log(x)} = 10^{\ln(x)+2} = (e^{\ln(10)\ln(x)} \cdot 10^2 = x^{\ln(10)} \cdot 100$$

Dette gir $x^{\ln(10)-1} = 10^{-2}$ og derfor

$$\underline{x = 10^{-2/(\ln 10 - 1)}}.$$

c) Vi tar logaritme av begge sider av likhetstegnet og får $2x\ln(3) = \ln 3^{2x} = \ln(\ln(5))$. Derfor er

$$\underline{x = \frac{\ln(\ln(5))}{2\ln(3)}}.$$

d) $\ln(x+1) - \ln(x-1) = 1$ er ekvivalent til $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1 = \ln(e)$ når $x > 1$. Denne likningen er ekvivalent til $\frac{x+1}{x-1} = e$. Vi ganger opp med $x - 1$ og får $x + 1 = e(x-1) = ex - e$. Dette er en lineær likning og løsningen er

$$x = \frac{e+1}{e-1} \simeq 2.1639.$$

3

Gitt følgende funksjon

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

med definisjonsmengde $[1/2, 3\rangle$.

a) Bestem monotoniegenskapene til $f(x)$. (Hvor er den voksende og avtagende?)

b) Bestem lokale og globale ekstremalverdier til $f(x)$. (Topp- og bunnpunkt til $f(x)$.)

c) Finn eventuelle vendepunkt til grafen til $f(x)$).

d) Lag en skisse av grafen til $f(x)$.

e) Finn en likning som beskriver tangentlinjene til grafen til $f(x)$ hvor $x = 1$ og hvor $x = \sqrt{2}$.

LF: Vi deriverer funksjonen f og benytter den deriverte til å bestemme monotoniegenskapene. Produktregelen og kjerneregelen gir

$$f'(x) = (x)'e^{-x^2/2} + x(e^{-x^2/2})' = 1e^{-x^2/2} + xe^{-x^2/2}(-x^2/2)' = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$$

a) b) Faktoren $e^{-x^2/2}$ er alltid positiv. Faktoren $(1 - x^2)$ er null når $x = \pm 1$ og positiv presis når $|x| < 1$. Så $f(x)$ er økende i intervallet $[1/2, 1]$ og avtagende i intervallet $[1, 3\rangle$. Det er derfor globalt (og dermed også et lokalt) maksimumspunkt i $(1, f(1)) = (1, e^{-1/2})$. Endepunktet $(1/2, f(1/2)) = (1/2, 1/2 \cdot e^{-1/8})$ er et lokalt bunnpunkt. Verdiene er omtrentlig

$$e^{-1/2} = 0.6065 \qquad \text{og} \qquad 1/2 \cdot e^{-1/8} = 0.4412$$

Dette er ikkje et globalt minimumspunk. Funksjonen tar mindre verdier. For eksempel er $f(2) = 2/e^2 = 0.27\ldots$.

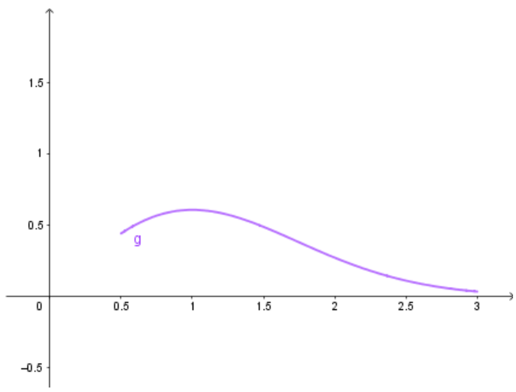
c) Vi ser nå etter vendepunkt. Den andre deriverte til f er

$$(1 - x^2)'e^{-x^2/2} + (1 - x^2)(e^{-x^2/2})' = -2xe^{-x^2/2} + (1 - x^2)(-x)e^{-x^2/2} =$$

$$x(x^2 - 3)e^{-x^2/2}$$

I intervallet $[1/2, 3\rangle$ er den andrederiverte negativ for $1/2 \le x < \sqrt{3}$ og positiv for $\sqrt{3} < x < 3$. Den adrederiverte er lik 0 og skifter fortegn i $x = \sqrt{3}$. Vi har at grafen til f er konkav ned (konkav) i $[1/2, \sqrt{3}]$ og konkav opp (konveks) i $[\sqrt{3}, 3\rangle$. Det er et vendepunkt i $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{-3/2})$. Funksjonsverdien er lik $\sqrt{3}e^{-3/2} = 0.3864\ldots$.

d) Her er grafen til f.



e) Stigningstallet til tangentlinjen for $x = 0$ er lik 0, derfor er tangentlinjen gitt ved $y = f(1) = e^{-1/2}$.

I punktet hvor $x = \sqrt{2}$ er stigningstallet til tangentlinjen $f'(\sqrt{2}) = \sqrt{2}/e$. LIkningen til tangentlinjen blir da

$$y - f(\sqrt{2}) = f'(\sqrt{2})(x - \sqrt{2}$$

som gir

$$y = \sqrt{2}/e + (-1/e)(x - \sqrt{2}) = -x/e + 2\sqrt{2}/e$$

4

Bestem alle polynomer av grad tre eller lavere som har ekstremalverdier i punktene

$$(-1, -3) \quad \text{og} \quad (1, 1)$$

LF:

Et polynom av grad tre eller lavere er på formen $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Den deriverte til polynomet er lik

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Siden den deriverte må være null i både -1 og 1 så er p' på formen en konstant ganget med polynomet

$$(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1.$$

Derfor er $b = 0$ og $c = -3a$. Polynomet er derfor på formen $p(x) = ax^3 - 3ax + d$. Siden $p(-1) = -3$ og $p(1) = 1$ så er

$$2a + d = -3 \text{ og } -2a + d = 1$$

Derfor er $2d = -3 + 1 = -2$ og $4a = -3 - 1 = -4$, så $d = -1$ og $a = -1$.

Det er derfor ett polynom av grad tre eller mindre med de gitte egenskapene. Polynomet

$$\underline{p(x) = -x^3 + 3x - 1.}$$

5

Dette er en optimaliseringsoppgave som er litt vanskelig. Hopp over den hvis du ikkje har glede av å løse oppgaven.

Hva må forholdet mellom radien og høyden i en åpen kjegle med et fast volum V være for at overflateareal A skal bli minst mulig? Finn forholdet eksakt. (Bruk gjerne regneverktøy til å undersøke problemet og sjekke svaret du kommer frem til.)

Volumet til en kjegle med radius R og høyde H er lik

$$V = \pi R^2 H/3$$

Overflatearealet til en åpen kjegle er lik

$$A = \pi R\sqrt{R^2 + H^2}$$

LF:
Vi kan uttrykke overflatearealet ved hjelp av R og volumet V.

$$A = \pi R\sqrt{R^2 + H^2} = \pi R\sqrt{R^2 + (3V/(\pi R^2))^2}$$

Vi deriverer A med hensyn til R og finner når den deriverte er lik 0. Overflatearealet går mot uendelig når enten R går mot null eller mot uendelig. Minste verdi for A ligger et sted i mellom. Den deriverte er lik

$$A'(R) = \pi R'\sqrt{R^2 + (3V/(\pi R^2))^2} + \pi R(\sqrt{R^2 + (3V/(\pi R^2))^2})' =$$

$$\pi\sqrt{R^2 + (3V/(\pi R^2))^2} + \pi R\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{R^2 + (3V/(\pi R^2))^2}}(\sqrt{R^2 + (3V/(\pi R^2))^2})' =$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{R^2 + (3V/(\pi R^2))^2}}\left(R^2 + (3V/(\pi R^2))^2 + (R/2)(2R - 4(3V/(\pi R^2))^2/R\right)$$

Dette er lik 0 presis når $2R^2 = (3V/(\pi R^2))^2$. Setter vi inn $3V/(\pi R^2) = H$ får vi $2R^2 = H^2$ og derfor er forholdet mellom (de positive størrelsene) R og H gitt ved $\underline{R/H = 1/\sqrt{2}}$.

Her har vi angrepet problemet ganske direkte. Alternativt kan vi uttrykke arealet direkte som en funksjon av forholdet mellom R og H. Derivasjonen ovenfor kan og gjøres litt enklere ved å observere at A er lik $\sqrt{\pi^2 R^2(R^2 + (3V/(\pi R^2)))^2}$. Siden kvadratrot-funksjonen er voksende får vi en minimumsverdi for A når

$$R^2(R^2 + (3V/(\pi R^2))^2)$$

er et minimum. Denne er litt enklere å derivere.

6

Finn volum og overflateareal til følgende figurer. Tegn gjerne figurene.

a) Et rett rektangulert prisme med sideflater av lengde 2, 3, og 5.

LF: Volumet er $V = 2 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{30}$. Overflaten består av seks flater. Arealet er

$$2(2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5) = \underline{62}.$$

b) En rett sylinder med radius 3 og høyde 7. (Topp og bunnplaten tas med når dere finner overflatearealet).

Volumet er grunnflate ganget med høyden. Det er $\pi 3^2 \cdot 7 = \underline{63\pi}$. Overflatearealet er

$$2\pi \cdot 3 \cdot 7 + 2 \cdot (\pi 3^2) = 2 \cdot 3(7 + 3)\pi = \underline{60\pi}.$$

c) Ein kjegle med radius 3 og høyde 7. (Bunnplaten tas med.)

Volumet er en tredel av volumet til tilsvarende sylinder. Fra b) e rderfor volumet $63\pi/3 = \underline{21\pi}$.

Bunnflaten har areal $\pi 3^2$. Kjeglen har det samme arealet som et sirkelsegment med radius $\sqrt{3^2 + 7^2}$ og buelengde lik $2\pi \cdot 3$. Sirkelsegmentet har areal halvparten av $\sqrt{3^2 + 7^2}$ ganget med buelengden. Dette er $\sqrt{58}2\pi \cdot 3/2 = 3\sqrt{58}\pi$. Totalt areal er derfor $\underline{(9 + 3\sqrt{58})\pi}$

d) En kule med radius 5. Volumet er $4\pi 5^3/3 = \underline{500\pi/3}$. Overflatearealet er $4\pi 5^2 = \underline{100\pi}$.

e) En halv kule (hvor snittflaten tas med) som har diameter 3.

Radien er halvparten av diameteren. Volumet er halvparten av volumet til den tilsvarende kulen. Volumet er

$$4\pi(3/2)^3/3 \cdot 2 = \underline{9\pi/4}.$$

Overflatearealet er

$$4\pi(3/2)^2/2 + \pi(3/2)^2 = \underline{27\pi/4}.$$

7

Finn vinklene og lengden til sidene, samt arealet til trekanten $\triangle ABC$ gitt som følger. Svaret kan gis som desimaltall med minst 4 siffers nøyaktighet. Tallene som er oppgitt er eksakte.

a) $\angle A = 90°$, $\angle C = 30°$ og $AB = 8$.

LF: Dette er en rettvinkla trekant. Siden summen av vinklene i en trekant er 180° så er $\underline{\angle B = 60°}$. Hypotenusen BC har lengde

$$\underline{BC = 8/\sin(30°) = 8/(1/2) = 16.00}.$$

Kateten AC har lengde $\underline{AC = 8/\tan(30°) = 8/(1/\sqrt{3}) = 8\sqrt{3} \approx 13.856}$. Arealet til trekanten er $AC \cdot AB/2$ (siden $\sin(\angle A) = 1$). Arealet er $(8\sqrt{3}) \cdot 8/2 = 32\sqrt{3} \approx \underline{55.425}$.

b) $\angle A = 90°$, $\angle C = 33°$ og $AB = 8$. Denne oppgaven er svært lik deloppgave a). Vinkel C er øka fra 30 til 33 grader. Vi forventer derfor at AC og BC er litt kortere her. Vinkel B er lik $\underline{\angle B = 57°}$. Hypotenusen BC har lengde $\underline{BC = 8/\sin(33°) \approx 14.689}$. Kateten AC har lengde $\underline{AC = 8/\tan(33°) \approx 12.319}$. Arealet til trekanten er $AC \cdot AB/2 = 12.319 \cdot 8/2 \approx \underline{49.276}$.

c) $\angle C = 20°$ og $AC = BC = 10$.

LF: Dette er ein likebeina trekant med to sider av lengde 10 og vinkel 20° mellom de to like sidene. Vinkel A og B må da være like store. Siden summen av vinklene i en trekant er 180° er $\underline{\angle A = \angle B = 80°}$. Lengden på siden $\underline{AB}$ er lik $2AC\cos(80°) = 20\cos(80°) \approx \underline{3.473}$. Arealet til trekanten er lik $AB \cdot AC \cdot \sin(80°)/2 \approx \underline{17.10}$.

d) $\angle A = 55°$, $\angle B = 44°$ og $AC = 23$.

LF: Siden summen av vinklene i en trekant er 180° så er $\underline{\angle C = (180 - 44 - 55)° = 81°}$. Her er det naturlig å anvende sinussettningen siden vi kjenner både vinkel B og lengden til side $b = AC$. Sinussettningen sier at følgende forhold er like

$$\frac{\sin\angle B}{b} = \frac{\sin\angle A}{a} = \frac{\sin\angle C}{c}.$$

Forholdet er lik $\sin(44°)/23 = 0.0302025\ldots$.

Lengden til siden $\underline{AB \text{ er } \sin(81°)/0.0302025 \approx 32.70}$ og

lengden til siden $\underline{BC \text{ er } \sin(55°)/0.0302025 \approx 27.12}$.

Arealet til trekanten er lik $AB \cdot AC \cdot \sin(55°)/2 \approx \underline{308.1}$.

e) $\angle A = 40°$, $AC = 8$ og $BC = 7$.

LF: Det er to forskjellige trekanter med disse egenskapene. Vi bruker sinussetningen og får :

$$\frac{\sin\angle C}{c} = \frac{\sin\angle B}{b} = \frac{\sin\angle A}{a} = \frac{\sin(40°)}{7} \approx 0.0918268\ldots.$$

Det følger at $\sin\angle B = AC \cdot 0.0918268\ldots = 0.734614\ldots$. Dette gir to mulige løsninger for $\angle B$, $\angle B_1 = \arcsin(0.734614) = 47.27°$ og $\angle B_2 = 180° - \angle B_1 = 132.7°$. Tilsvarende verdier for vinkel C er $\angle C_1 = 92.73°$ og $\angle C_2 = 7.275°$. Lengden til siden AB, eller c, er lik $\sin(\angle C)\sin(\angle A)/a$. I de to tillfellene får vi $\underline{AB_1 = 10.88 \text{ og } AB_2 = 1.37}$.

Arealet til trekanten er lik $AC \cdot AB \cdot \sin(\angle C)/2$. I tilfelle 1 er arealet til trekanten $8 \cdot 7\sin(92.725°) \approx \underline{27.97}$ og i tilfelle 2 er arealet til trekanten $8 \cdot 7\sin(7.2746°)/2 \approx \underline{3.545}$.

f) $\angle A = 120°$, $AB = 12$ og $AC = 7$.

Her er det naturlig å bruke cosinussettningen siden vi kjenner vinkelen mellom de to kjente sidene. Cosinussettningen gir at

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos(120°) = 7^2 + 12^2 - 2 \cdot 7 \cdot 12(-1/2) = 49 + 144 + 84 = 277.$$

Siden $a > 0$ så er $\underline{BC = a = \sqrt{277} \approx 16.64}$. Fra sinussettningen er

$$\sin(\angle C) = AB \cdot \sin(\angle A)/BC = 12(\sqrt{3}/2)/16.6433 = 0.62441\ldots.$$

Siden $\angle A = 120°$ så er summen av vinkel B og vinkel C lik $70°$. Derfor er $\underline{\angle C = 38.64°}$ og $\underline{\angle B = 21.36°}$. Arealet til trekanten er lik

$$7 \cdot 12 \cdot \sin(120°)/2 = \underline{36.37}.$$

8

Bestem lengden på alle sidene og finn alle vinklene til alle trekantene spesifisert som følger:

a) Trekantene er rettvinkla og to av sidene har lengde 4 og 5.

Tilfellet 1: Katetene har lengde 4 og 5. Da har hypotenus lengde $\sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41} \approx 6.403$. Vinkelen som har kateten med lengde 5 som hosliggende katet er da lik $\arctan(4/5) \approx 38.660°$. Den andre vinkelen, som har kateten med lengde 4 som hosliggende, er da lik $90° - 38.660° = 51.340°$.

Tilfellet 2: Hypotenus er lengre enn katetene. En mulighet er at 5 er lengden på hypotenus og 4 er lengden på den ene kateten. Lengden på den andre kateten er da $\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$ (eksakt). Vinkelen som har kateten med lengde 4 som hosliggende er da lik $\arccos(4/5) \approx 36.870°$. Den andre vinkelen, som har kateten med lengde 3 som hosliggende, er da lik $90° - 36.870° = 53.130°$.

b) Trekantene er likebeina og en av vinklene er 30 grader og en av sidene har lengde 10.

Tilfellet 1: Vinkelen mellom de to sidene som er like lange er 30 grader. Da er de to andre vinklene $(180° - 30°)/2 = 75°$. Hvis de to sidene som er like lange har lengde 10 har den tredje siden lengden $2 \cdot 10 \sin(15°) \approx 5.176$.

Tilfellet 2: Vinklenen som i tilfellet 1, men anta at det er siden som ikke er like lang som en annen side som har lengde 10. Da er lengden på de to sidene som er like lange lik $(10/2)/\sin(15°) \approx 19.316$.

Tilfellet 3: La oss nå anta at vinkelen på 30 grader ikke er vinkelen mellom sidene som er like lange. Da er begge disse vinklene 30 grader, og vinkelen mellom de like lange sidene er 120°. Hvis de to like lange sidene har lengde 10, da er lengden på den tredje siden $2 \cdot 10 \cdot \sin(60°) = 10\sqrt{3} \approx 17.320$.

Tilfellet 4: La vinklene være som i tilfellet 3. En annen mulighet er at de to like sidene har lengde $10/\sqrt{3} \approx 5.774$ og at den tredje siden har lengde 10.

c) Den ene vinkelen er 30 grader og to av sidene har lengde 8 og 5.

La side a ha lengde 8 og side b ha lengde 5. Vi undersøker hvilke trekanter vi kan ha når vi setter hver av de tre vinklene i trekanten lik vinkelen 30°.

Tilfellet 1: Vinkel C er 30 grader. Ved cosinussetningen er da $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(30°) = 89 - 40\sqrt{3} = 19.717$. Derfor er lengden på den tredje siden $c = 4.440$. Ved sinussetningen er $\sin(\angle A) = 8\sin(30°)/c = 0.9008$. Derfor er $\angle A$ er lik 64.26° eller $(180 - 64.26)° = 115.74°$. Sinussetningen gir også at $\sin(\angle B) = 5\sin(30°)/c = 0.5630$. Dette gir at $\angle B$ er lik 34.26° eller 145.74°. Vi ser at de eneste kombinasjoner av vinklene som har sum 180° er $\angle A = 115.74°$, $\angle B = 34.26°$, $\angle C = 30°$.

Tilfellet 2: Vinkel B er 30 grader. Ved sinussetningen så er $\sin(\angle A) = a\sin(\angle B)/b = 4/5$. Derfor er $\angle A$ lik 53.13° eller 126.87°. Når $\angle A = 53.13°$ er da $\angle C = 96.87°$. Ved sinussetningen er da lengden på den siste siden er da lik $c = \sin(\angle C)b/\sin(\angle B) = 9.93(9.928)$.

Tilfellet 3: Vinkel B er 30 grader, men vi ser på den andre muligheten for vinkel A fra Tilfellet 2. Da er $\angle A = 126.87°$. Og derfor er $\angle C = 23.13°$ Ved sinussetningen er da $c = \sin(\angle C)b/\sin(\angle B) = 3.928$.

Tilfellet 4: Vinkel A er lik 30 grader. Ved sinussetningen er $\sin(\angle B) = b\sin(\angle A)/a = 5/16 = 0.3125$. Dette gir at $\angle B$ er lik 18.21 eller 161.79 grader. Vinkelen $\angle B = 161.79°$ er ikke mulig siden summen av vinklene $\angle A + \angle B + \angle C = 180^{circ}$. Hvis $\angle B = 18.21°$, da er $\angle C = 131.79°$. Lengden på den siste siden er $c = a\sin(\angle C)/\sin(\angle A) = 11.93$.

d) Trekanten har sider av lengde 2, 3 og 4. Vi gir navn til hjørnene i trekanten slik at side a har lengde 2, side b har lengde 3 og side c har lengde 4. Fra cosinussetningen har vi at $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\angle C)$. Dette gir at $\cos(\angle C) = -1/4$. Derfor er $\angle C = \arccos(-1/4) = 104.48°$. Ved sinussetningen så er $\sin(\angle B) = b\sin(\angle C)/c = 0.72618$. Siden summen av vinklene skal være $180°$ så er bare $\angle B = 46.57$ en mulig løsning. Vinkel A må da være $\angle A = 28.96°$.