Produktsetning

Betinga sannsynlighet $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Produktsetningene
$$P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B)$$
$$= P(B|A)\,P(A)$$

---

eks

Klasse med 24 elever. 14 jenter 10 gutter

Plukker ut to tilfeldige elever.

Hva er sannsynligheten for at begge er jenter?

$$S = \{JJ, JG, GJ, GG\}$$

P (første eleven er en jente) $= \frac{14}{24}$ — J_1

P (andre elev jente | første elev jente) $= \frac{13}{23}$ — J_2

$$P(J_1 \cap J_2) = P(J_2 | J_1) \cdot P(J_1)$$
$$= \frac{13}{23} \cdot \frac{14}{24}$$

sannsynligheten for at begge elevene er jenter er: $\frac{13 \cdot 14}{23 \cdot 24} = 32.97\% \sim 33\%$

oppgave sannsynligheten for at vi trekke en jente og en gutt?

$$\left.\begin{aligned} P(\text{jente så gutt}) &= \frac{14}{24}\,\frac{10}{23} \\ P(\text{gutt så jente}) &= \frac{10}{24} \cdot \frac{14}{23} \end{aligned}\right\}$$

summen 50.72% er sannsynligheten for å trekke én gutt og én jente

Sannsynligheten for å trekke to gutter

$$\frac{10}{24} \cdot \frac{9}{23} = 16.30\%$$

Vi har trekt to elever og får vite at begge har samme kjønn. Hva er sannsynligheten at begge er gutter?

(P(to jenter) = 33% P(to gutter) ~ 16.3%)

Det er den betinga sannsynligheten

$$P(\text{to gutter} \mid \text{to av samme kjønn}) = \frac{P(\text{to gutter})}{\underbrace{P(\text{to jenter}) + P(\text{to gutter})}_{\text{disjunkte}}}$$

$\underline{\sim 33\%}$

Det skal i stedet trekkes tre elever i klassen. Hva er sannsynligheten at vi trekker 1 gutt og 2 jenter? (Klassen 24 : 14 jenter + 10 gutter)

$$P(\text{gutt, jente, jente}) = \underset{P(\text{gutt})}{\frac{10}{24}} \cdot \underset{P(\text{jente} \mid \text{gutt})}{\frac{14}{23}} \cdot \underset{P(\text{jente} \mid \text{gutt, jente})}{\frac{13}{22}}$$

$$= \frac{10 \cdot 13 \cdot 14}{24 \cdot 23 \cdot 22}$$

$$P(\text{én gutt og 2 jenter}) = 3 \cdot P(\text{gutt, jente, jente})$$

$$= 3 \cdot \frac{10 \cdot 13 \cdot 14}{24 \cdot 23 \cdot 22} = \underline{45\%}$$

$$P(\text{to gutter én jente}) = 30\%$$

oppg. fra sist onsdag

Fruktskål 7 bananer, 9 appelsiner, 5 epler } totalt 21 frukt

Trekker tilfeldig 6 frukter.
Sannsynligheten for å få to av hver.

Vi regner ut sann for å trekke i rekkefølge
b b a a e e. × antal permutasjoner som gir forskjellige rekkefølge av frukter.

$$\# \text{Permutasjoner}: \quad \frac{6!}{2 \cdot 2 \cdot 2}$$

$\frac{\text{antal ombytte av 6 ulike objekter}}{(\text{to og to like så ombytter av dem gir ingen endring:})\ 2 \cdot 2 \cdot 2}$

$$P(b, b, a, a, e, e) = \underbrace{\frac{7}{21} \cdot \frac{6}{20}}_{\text{prod. setning}} \underbrace{\frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18}}_{-} \cdot \underbrace{\frac{5}{17} \frac{4}{16}}_{-}$$

Sannsynligheten for å trekke to av hver frukt:

$$\frac{(7 \cdot 6) \cdot (9 \cdot 8) \cdot (5 \cdot 4)}{21 \cdot 20 \cdots 16} \cdot \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = \frac{\frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2}}{\frac{21 \cdot 20 \cdots 16}{6!}}$$

$$= \frac{\binom{7}{2}\binom{9}{2}\binom{5}{2}}{\binom{21}{6}}$$

hvor $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$ er binomialkoeffisienten

$$= \frac{45}{323} \sim \underline{13.9\%}$$

Generelt har vi: k ulike objekter
n_i av type i $\quad i = 1, \ldots k$

Sannsynligheten for å trekke m_i av obj i for $i = 1, \ldots k$ er da

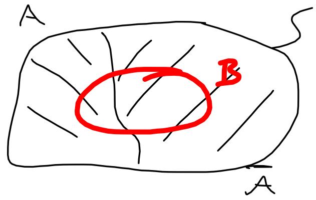
$$\frac{\binom{n_1}{m_1} \cdot \binom{n_2}{m_2} \cdots \binom{n_k}{m_k}}{\binom{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}{m_1 + m_2 + \cdots + m_k}}$$

gitt at det plukkes $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ frukt.

Hypergeometrisk fordeling

19.6 Total sannsynlighet

$$P(B) = \underbrace{P(B|A) \cdot P(A)}_{P(B \cap A)} + \underbrace{P(B|\bar{A})\, P(\bar{A})}_{P(B \cap \bar{A})}$$



Eksempel

stor bedrift.

$P(M) = 40\%$ $P(K) = 60\%$

S ansatte

Hendelser:

M : mann

K : kvinne

F : fast ansatt

D : deltids ansatt

$P(F|M) = 60\%$

$P(F|K) = 40\%$

$\bar{M} = K$

Hva er $P(F)$

$$P(F) = P(F|M) \cdot P(M) + P(F|K) \cdot P(K)$$

$$0.6 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.6$$

$$= 0.48 = \underline{48\%}$$

Mer generelt

$B \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3$ disjunkte

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3)$$

19.7 Uavhengighet

B er uavhengig av A : $P(B|A) = P(B)$

Siden $P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$ når $P(A) > 0$

uavhengighet : $\frac{P(B\cap A)}{P(A)} = P(B)$

$$\boxed{P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)}$$

også når $P(A)$ eller $P(B)$ er 0.

B uavhengig av A $\Leftrightarrow$ A uavhengig av B :

A og B er uavhengige av hverandre.

Hvis $P(A) = 10\%$ $P(B) = 10\%$ og $P(A\cup B) = 19\%$, er da A og B uavhengige?

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$$

$$0.1 + 0.1 - 0.19 = 0.20 - 0.19$$

$$= 0.01 = 1\%$$

= like

$$P(A)\cdot P(B) = 0.1\cdot 0.1 = 0.01 = 1\%$$

Så A og B er uavhengige hendelser.

$$P(A \cap B) > P(A) \cdot P(B)$$

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} > \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} > P(B)$$

A øker sannsynligheten for B

$\iff$ B øker sannsynligheten for A.

A, B disjunkte. Kan da A og B være uavhengige?

$A \cap B = \emptyset$ så $P(A \cap B) = 0$

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) = 0$$

Bare hvis $P(A)$ eller $P(B)$ er lik null.

oppg. Anta A og B er uavhengige.

Vis at da er A og $\bar{B}$ også uavhengige.

GiH : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\left(P(A) = \underbrace{P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})}_{\text{disjunkte}} \right.$ med union A $\left. \right)$

Vi skal vise at $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B})$.

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - \underset{\text{uavh.}}{P(A) \cdot P(B)} = P(A)\underbrace{(1 - P(B))}_{P(\bar{B})}$$

$$\underline{= P(A) \cdot P(\bar{B})}$$

Eks M : Tar medesinen
F : Blir friske i løpet av året

$P(M) = 10\%$ $P(F) = 35\%$

$P(M \cap F) = 3\%$

Fungerer medesinen? Blir pasientene friskere
sykere
eller har medesinen ingen effekt?

$P(M) \cdot P(F) = 0.1 \cdot 0.35 = 0.035 = 3.5\% > P(M \cap F)$

$P(F \mid M) < P(F)$

medesinen virker mot sin hensikt.
Færre blir friske.