Hva er sannsynligheten for at minst to elever har bursdag samme dag i en klasse med 30 elever? (Antar at det er 365 dager i ett år)

Hendelse: H minst to av eleve har bursdag samme dag.

ikke H. Komplementet til H

$\bar{H}$ alle elevene har bursdag ulike dager.

$P(H) = 1 - P(\bar{H})$

$$P(\bar{H}_{30}) = \frac{365}{365} \frac{364}{365} \frac{363}{365} \frac{362}{365} \cdots \frac{365-29}{365}$$

Regner ut produktet med geogebra og

får $P(H) = 0.7063 \approx \underline{70.6\,\%}$

19.4 Betinga sannsynlighet

$P(B \mid A)$ "sannsynlighet for B gitt A"

n antall forsøk

$$P(B \mid A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\# A\cap B}{\# A} \qquad (\# A > 0)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\# A\cap B / n}{\# A / n}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} \# A\cap B / n}{\lim_{n\to\infty} \# A / n} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$\boxed{P(B \mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}} \qquad P(A) > 0$$

$$0 \leq P(B \mid A) \leq 1$$

$$P(A) \cdot P(B \mid A) = P(A\cap B)$$

$$P(B) \cdot P(A \mid B) = P(A\cap B)$$

produktsetningene

Bayes setning
$$\underline{P(B \mid A) = \frac{P(B)}{P(A)} P(A \mid B)}$$

Kaster én terning

$T = \{3, 4, 5, 6\}$ minst tre

$F = \{4, 5, 6\}$ minst fire

$j = \{2, 4, 6\}$ jevnt tall

$P(j \mid F)$ sannsynligheten at tallet er jevnt når det er mins fire.

$$= \frac{P(j \cap F)}{P(F)}$$

$P(F) = P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\})$
$3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

$j \cap F = \{4, 6\}$. $P(j \cap F) = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$$P(j \mid F) = \frac{1/3}{1/2} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \sim 67\%$$

$$P(j \mid T) = \frac{P(j \cap T)}{P(T)} = \frac{P(\{4, 6\})}{P(\{3,4,5,6\})} = \frac{2 \cdot \frac{1}{6}}{4 \cdot \frac{1}{6}}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}}$$

$$P(F \mid T) = \frac{P(\overbrace{F \cap T}^{F})}{P(T)} = \frac{3 \cdot \frac{1}{6}}{4 \cdot \frac{1}{6}} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

oppg $P(F \mid j) = \frac{P(F \cap j)}{P(j)} = \frac{P(\{4, 6\})}{1/2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{6}}{1/2}$

$= \frac{2}{3}$ $\left(= \frac{P(F)}{P(j)} P(j \mid F) = \frac{1/2}{1/2} P(j \mid F) = \frac{2}{3} \right)$

Bayes setning

$$P(T \mid j) = \frac{P(T)}{P(j)} P(j \mid T) = \frac{4 \cdot \frac{1}{6}}{3 \cdot \frac{1}{6}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{2}{3}}$$

$$P(T \mid F) = \frac{P(T \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$ selvsagt!

Anta sannsynligheten for å bli n år er (fiktive data!)

$P(H_{50}) = 85\%$ $n = 50$

$P(H_{70}) = 65\%$ $n = 70$

Hva er sannsynligheten at en person som nett har fylt 50 år lever til han blir 70 år?

(H_n er hendelsen: Personen blir minst n år)

$$P(H_{70} \mid H_{50}) = \frac{P(H_{70} \cap H_{50})}{P(H_{50})} = \frac{P(H_{70})}{P(H_{50})}$$

$$= \frac{0.65}{0.85} \sim 0.76 = \underline{76\%}$$

To sykdommer A og B

$P(A) = 1\%$ $P(B) = 2\%$

$P(A \cup B) = 2.9\%$, $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$= 1\% + 2\% - 2.9\%$

$= 0.1\%$

OPPG

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.1\%}{1\%} = 0.1 = \underline{10\%}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1\%}{2\%} = 0.05 = 5\%$$

(alternativt: Bayes setning

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B \mid A) \ldots$$)

2 terninger kastes.

oppg. Hva er sannsynligheten for at minst én av terningene viser 3 når summen av terningene er 5?

Hendelsen: summen er 5 H_5

en av terningene viser 3 : K_3

$$P(K_3 \mid H_5) = \frac{P(K_3 \cap H_5)}{P(H_5)}$$

$$H_5 = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$$

$$K_3 \cap H_5 = \{(2,3), (3,2)\}$$

$$P(K_3 \cap H_5) = \frac{2}{36} \qquad P(H_5) = \frac{4}{36}$$

Så $P(K_3 \mid H_5) = \frac{2/36}{4/36} = \frac{2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

Variasjon: Hva er sannsynlighet for at minst én 3-er når summen er 6?

$$P(K_3 \cap H_6) = P\{(3,3)\} = \frac{1}{36} \qquad P(H_6) = \frac{5}{36}$$

$$P(K_3 \mid H_6) = \frac{1}{5} = \underline{20\%}$$

Derimot er $P(K_3 \mid H_7) = \frac{P(K_3 \cap H_7)}{P(H_7)}$

$$= \frac{P(\{(3,4), (4,3)\})}{P(H_7)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{36}}{6 \cdot \frac{1}{36}} = \frac{1}{3} \sim \underline{\underline{33\%}}$$

Vi kaster en terning. Den viser 3.
Vi kaster en terning til. Hva er
sannsynligheten at summen blir minst 5?
Dette skjer hvis terning nr 2 gir 2, 3, 4, 5
eller 6. Sannsynligheten for dette er $\underline{\frac{5}{6}}$

_ _ _ _ _ _ _

Oppgave

Fruktskål
7 bananer
9 appelsiner
5 epler

Vi trekker tilfeldig 6 frukt. Hva er
sannsynligheten for å trekke 2 av hver?

$$\frac{45}{323} \sim \underline{13.9\,\%}$$

(hint: hypergeometrisk fordeling)