18.3-5 Kombinatorikk

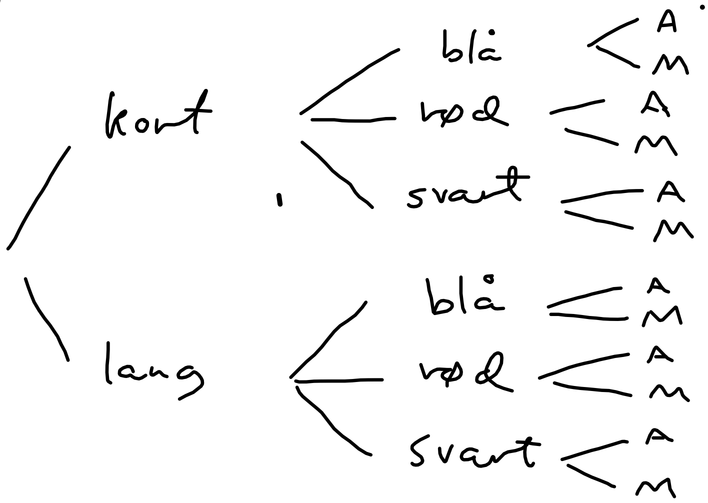
Vi skal kjøpe en stasjonsvogn

Det er tre valg.

1 kort eller lang type

2 farge : blå, rød, svart

3 automat eller manuell gir.



2 $\qquad 2 \cdot 3 = 6 \qquad 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ ulike versjoner av bilen

Multiplikasjons prinsipp (Produkt regel): Forsøk utføres i k etapper

etappe:	1	2	3	...	k
	n_1 mulige utfall	n_2 mulige utfall	n_3 mulige utfall		n_k mulige utfall

Totalt antall mulige utfall er produktet

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$$

spessielt hvis antall mulige utfall i hver etappe er n, så er totalt antall mulige utfall etter k etapper lik n^k (potensregelen)

Vi skal velge studentrepresentanter.
Det velges én fra hver av klassene A, B og C
Antall studenter i klasse A er 25

—— B . 20

— C . 22

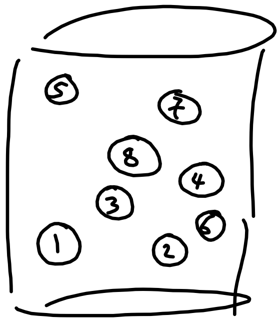
Hvor mange ulike sammensetninger av studentrepresentanter finnes?
3 etapper, hvelger én representant fra hver klasse:
(multiplikasjonsprinsippet)

$$25 \cdot 20 \cdot 22 = 500 \cdot 22 = 11\,000$$

oppgave Hva er antall ulike "ord" av lengde 3 vi kan lage i det engelske alfabetet (26 bokstaver)?
(Eks. på ord: out, vvi, lut,)

$$26^3 = 17\,576$$

Urne/krukke modell



n kuler nummert fra 1 til n

Tre typer forsøk

- Ordna utvalg med tilbakelegging.
  Trekker en kule, noterer tallverdi, legger tilbake og gjentar prosessen k ganger.

  2, 14, 3, 5
  $k=4$
  $(n \geq 14)$

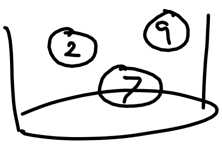
  3, 5, 3, 4, 1, 1
  $k = 6$
  $(n \geq 5)$

- ordna utvalg uten tilbakelegging
  Trekker en kule, beholder den og husker rekkefølgen den ble trekt i, trekker en ny, gjentar prosessen k ganger

  3 4 1 7
  1. 2. 3. 4. uttrekking
  $k=4, \quad n \geq 7$

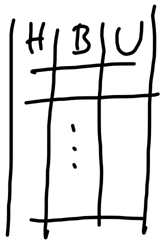
  gir bare mening når $k \leq n$.

- uordna utvalg uten tilbakelegging
  Trekker en kule og legger den i en boks, gjentar prosessen k ganger.
  Vi husker ikkje på rekkefølgen kulene ble trekt i



Antall mulige utfall:
k ordna utvalg m. tilbakelegging fra en samling av n ulike objekter
er $\underline{n^k}$

Eks Tipping



12 kamper

Antall mulige kombinasjoner 3^{12}
$= 531\,441$

- Antall mulige utfall:
k ordna utvalg <u>uten</u> tilbakelegging av en samling av n objekter er

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \qquad k \leq n$$

Eks 3 personer spiser én frukt hver fra en samling av
en banan
en eple
en pære
en appelsin

Hvor mange utfall er det?

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

$k = n$ ordna utvalg av n objekter fra en samling av n objekter
svarer til et valg av rekkefølge av n objekter.
Antall slike rekkefølger av n objekter
er lik $n \cdot (n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$

n fakultet $\quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

$0! = 1$

$1! = 1 \qquad 2! = 2 \qquad 3! = 6 \qquad 4! = 24$

$5! = 5 \cdot 4! = 120 \qquad 6! = 6 \cdot 5! = 720 \quad \ldots$

$n = 2 \qquad 1,2$ og $2,1 \qquad$ AB, BA etc

2 ulike objekter

$n = 3$

A B C

A C B

B A C

C A B

B C A

C B A

6 mulige rekkefølge av 3 ulike objekter.

Vi har $\quad n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Antall mulige utfall av k
vordna utvalg uten tilbakelegging
fra en samling av n objekt er

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$$

$n = 3$ fra objekte ABC
$k = 2$

ordna		vordna
AB	BA	AB
AC	CA	CA
BC	CB	BC
$3 \cdot 2$		$\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k \cdots 1} = \left(\frac{n!}{(n-k)!}\right) \cdot \frac{1}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Denne størrelsen skrives som $\binom{n}{k}$
leses som "n velg k"

Den kalles binomialkoeffisienten

Eks Lottotrekning

$n = 34$ kuler ①, ②, ... ㉞

$k = 7$ velger ut 7 kuler.

Antall mulige utfall (utvalg av 7 tall hvor vi ikkje bryr oss om rekkefølgen)

$$\binom{34}{7} = 5\ 379\ 616$$

oppgave

4 personer velger én frukt hver fra et stort fruktfat med bananer, epler, pærer og appelsiner. Det er minst 4 av hver frukt.

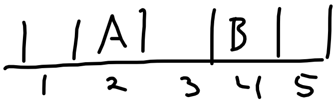
Hvor mange utfall er mulig?

Dette svarer til et ordna utvalg med tilbakelegging.

$$n^k = 4^4 = (2^2)^4 = 2^8 = \underline{256}$$

n plasser (ordna)

Hvor mange ulike (forskjellige) måter kan k ordna objekter plasseres i boksene?

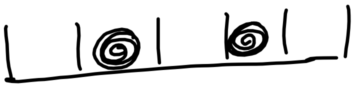


$k=2$
$n=5$

1 obj : n muligheter
2 obj : $(n-1)$ ——
:
k obj : $(n-k+1)$ muligheter

Det er $\frac{n!}{(n-k)!}$ mulige måter å plassere k objekter i n bokser (ikke mer enn ett objekt i hver boks)

k identiske stålkuler som skal plasseres i n bokser (maks en kule i hver boks)
På hvor mange måter kan dette gjøres?



uordna utvalg av k steder blant n steder.
Så antall muligheter er $\underline{\underline{\binom{n}{k}}}$