Mengdelære

En mengde er en samling elementer

$A = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}$

rekkefølgen uten betydning.

$1 \in A$ $\qquad$ $b \notin A$

"element i"

To mengder er like hvis de har de samme elementene

$\{a, b\} = \{b, a\}$, $\qquad$ $\{1, 2, a\} \neq \{3, a, b\}$

Hvis $x \in A$ fører til at $x \in B$ da er A en delmengde av B

$\{a, b, 1\} \subset \{a, b, c, 1, 2\}$

$A \subset B$ $\qquad$ $B \supset A$

A inneholdt i B $\qquad$ B inneholder A.

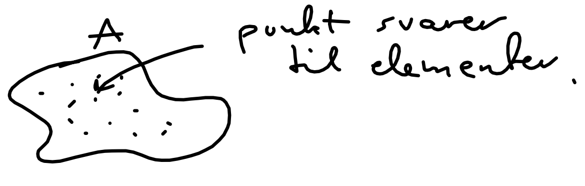
$A = B \underset{\text{ekvivalent}}{\iff} A \subset B$ og $B \subset A$

Den tomme mengden $\emptyset = \{\ \}$ har ingen elementer.

Vi kan ha mengder av mengder

$M = \{\{a\}, 1, b\}$

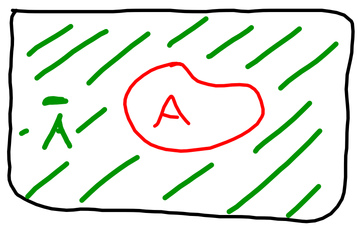
$\{a\} \in M$ men $a \notin M$



Venn diagram brukes til å visualisere mengder

S grunnmengde

$A \subset S$ delmengde

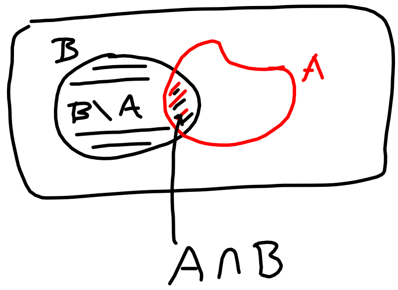


Komplementet til en delmengde A i S er mengden som består av alle elementene i S som ikkje er i A

$S - A = S \setminus A = \bar{A}$ (når S er underforstått

B, A delmengder i S.

$B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$



Snittet til to mengder A og B er mengden $A \cap B$ med elementer alle elementer som er med i både A og B.

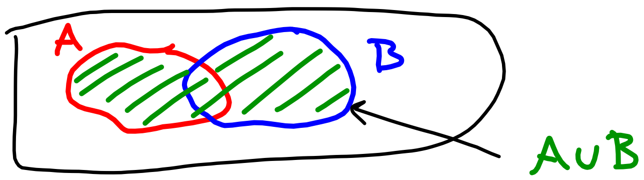
Hvis $A \cap B = \emptyset$ sier vi at A og B er <u>disjunkte</u>. De har ingen elementer til felles

$A = \{\{a\}, b, c, d\}$ $B = \{a, b, 1, \{\ \}\}$

$A \cap B = \{b\}$

Unionen $A \cup B$ av to mengder A og B er mengden som består av alle elementer i A og/eller i B.

Eks $A \cup B = \{a, \{a\}, b, c, d, 1, \{\ \}\}$



Mengder av tall

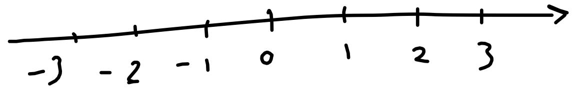
Naturlige tall $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots \}$

Heltall $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

Rasjonale tall $\mathbb{Q} = \{[\frac{p}{q}]$ $q \neq 0$, p, q heltall

$$\left(\frac{4}{2} \sim \frac{2}{1} \text{ etc.} \quad \frac{p}{q} \sim \frac{r}{s} \Leftrightarrow ps = rq \right)$$

Reelle tall $\mathbb{R}$ elementene svarer til punkt på linjen



$$\{ x \in \mathbb{R} \mid \text{betingelse på } x \} \subset \mathbb{R}$$

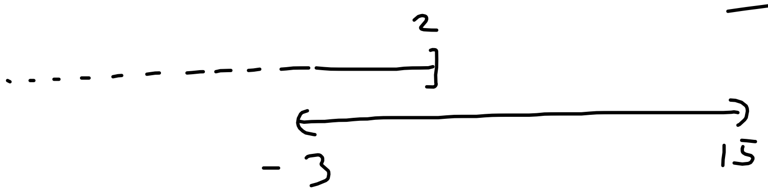
$$\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 4 \}$$

mengden av alle x: $x < -2$ eller $x > 2$

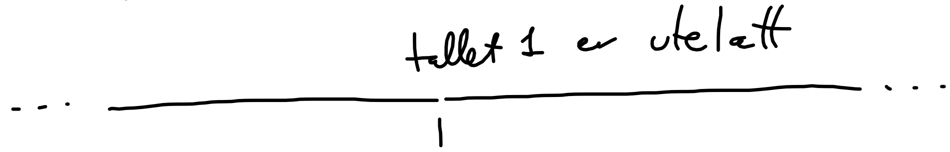
Den delmengden skrives også som $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$

oppg. Hva er $\langle -\infty, 2] \cap \langle -3, 15 \rangle$

$$= \underline{\langle -3, 2]}$$



eks



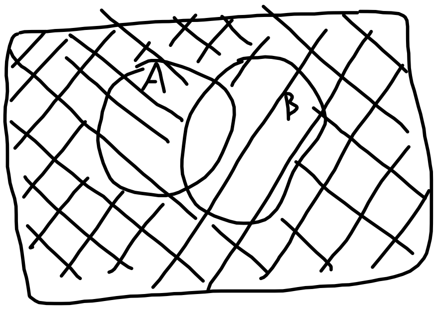
kan skrives som $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ eller $\langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$

de morgans lover

A, B delmengder i S

$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$

($\bar{A} = S \setminus A$
komplementet
til A i S)



oppg $\overline{(\bar{A})} = A$

$\bar{A} \cup A = S$ $\bar{A} \cap A = \emptyset$

Russels paradoks

<u>Mengden</u> av alle mengder
som ikkje inneholder seg selv.
(som element)

Dette gir en selvmotsigelse.
"Vi kan ikkje lage mengder av alt".

Funksjoner

$f : A \to B$

tilordner et element i B for hvert element i A.

$$\underset{\text{sendes til}}{a \longmapsto} f(a) \ (\in B)$$

f er injektiv hvis $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$

surjektiv – For alle $b \in B$ så finnes det en a slik at $f(a) = b$

f er bijektiv hvis f er både injektiv og surjektiv

$\Leftrightarrow$ det finnes en inversfunksjon $g : B \to A$ slik at

$$g(f(a)) = a \quad \text{alle } a \in A$$

$$f(g(b)) = b \quad - \quad b \in B$$

Det er en bijeksjon mellom $\mathbb{N}$ og $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{lllllll}
\mathbb{N}: & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\
\mathbb{Z}: & 0 & 1 & -1 & 2 & -2, & \ldots
\end{array}$$

opps

Finn en bijeksjon mellom $\mathbb{R}$ og $\langle 0, \infty \rangle$ positive reelle tall.

$f(x) = e^x$ gir en slik bijeksjon

$f : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty \rangle$

inversfunksjonen $g : \langle 0, \infty \rangle \to \mathbb{R}$

er $g(x) = \underline{\ln}\ x$