Geometriske følger og rekker

$a_{n+1} = k a_n$ alle n

k konstant

Ledd n : $a_n = k^{n-1} \cdot a_1$

Eks: $k=2$; $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ $\underbrace{2^{n-1}}_{a_n}$ uendelig geometrisk følge.

$k=\frac{1}{2}$; $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$ uendelig geometrisk følge

$k=1$; $a, a, a, a, \ldots$ geometrisk følge (de eneste som også er aritmetiske)

oppg. Finn et uttrykk for ledd n i den geometriske følgen $-9, 18, -36, 72, -144, \ldots$

$k = \frac{18}{-9} = -2.$

$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
$= \underline{-9(-2)^{n-1}}$

oppg. En geometrisk følge har $a_{13} = 13$
$a_{16} = 26$

Finn a_n.

$\frac{a_{16}}{a_{13}} = k^3$ $\quad (a_{16} = k a_{15} = k(k a_{14}) = k \cdot k \cdot (k a_{13}))$

$2 = k^3$ så $k = \sqrt[3]{2}$.

$a_n = k^n \cdot L$ ← konstant.

siden $a_{13} = 13$ må L være:

$13 = a_{13} = k^{13} \cdot L$ så $L = \frac{13}{k^{13}}$

$a_n = \frac{13}{k^{13}} \cdot k^n = 13 \cdot k^{-13} \cdot k^n = \underline{13 \cdot k^{n-13}}$

$\underline{a_n = 13 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^{n-13}}$

oppg. En geometrisk følge b_n har $b_4 = 6$ og $b_6 = 24$. Bestem om mulig b_n

$4 = \frac{b_6}{b_4} = k^2$ Så $k = 2$ eller $k = -2$.

Vi kan ikkje avgjøre om $k = 2$ eller -2 i følgen.

b_n kan ikkje bestemmes (b_{2n} er bestemt)
men den må være en av de følgende to geometriske følgene:

$k = 2$ $\quad b_n = b_4 \cdot k^{n-4} = 6 \cdot 2^{n-4} = \underline{\frac{3}{8} 2^n}$

$k = -2$ $\quad b_n = 6 \cdot (-2)^{n-4} = \underline{\frac{3}{8} (-2)^n}$

oppg. I dag får dere utbetalt 100 kr
Hver dag fremover utbetales et beløp som er 1% mindre enn gårsdagens beløp. Hva får dere utbalt i dag n (dagen i dag er dag 0)?

$100\,(1,\ 0.99,\ (0.99)^2,\ (0.99)^3,\ \dots\ )$

$a_n = 100\,(0.99)^n$

Geometrisk rekke

Rekken tilordnet en geometriske følge

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + \cdots + a_1 k^{n-1}$$

$$a_1 (1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1})$$

Resultat

$$S_n = 1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{k^n - 1}{k-1} & k \neq 1 \\ n & k = 1. \end{cases}$$

bevis:

$$(k-1) S_n = k(1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1})$$
$$-1(1 + k + \cdots k^{n-1})$$

$$= \begin{matrix} & \underbrace{k}_{} & + \underbrace{k^2}_{} & + \underbrace{k^3}_{} & + \cdots & + \underbrace{k^{n-1}}_{} & + k^n \\ -1 & \underbrace{- k}_{=0} & \underbrace{- k^2}_{=0} & \underbrace{- k^3}_{=0} & - \cdots & \underbrace{- k^{n-1}}_{=0} & \end{matrix}$$

$$= k^n - 1$$

$$k \neq 1: \quad S_n = \frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

Eksempel $\quad 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$

$k = 2$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1} = \underline{2^n - 1}$$

oppgave Finn summen til den geometrisk rekken

$$\underset{a_1}{5} + \frac{10}{3} + \frac{20}{9} + \frac{40}{27} + \cdots + a_{10}$$

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10/3}{5} = \frac{2}{3}. \qquad a_n = a_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$5(\underbrace{1 + k + k^2 + \cdots + k^9}_{\frac{k^{10}-1}{k-1}}) \qquad k \neq 1$$

Summen

$$5 \cdot \frac{(2/3)^{10} - 1}{2/3 - 1} = 5 \, \frac{1 - (2/3)^{10}}{1/3}$$

$$= \underline{15\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right)}$$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{S_n} + \cdots$$

$$S_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} \cdot \frac{(-2)}{(-2)} = \underline{2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

Når $n \to \infty$ vil $S_n \to 2$.

Den Uendelige geometriske rekken $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ konvergerer til 2.

$k = 1 - r \qquad a_1 = 100$

$$100\left(1 + (1-r) + (1-r)^2 + \cdots\right)$$

$$= 100 \sum_{i=0}^{\infty} (1-r)^i$$

n-te delsum $\quad S_n = 100 \sum_{i=0}^{n-1} (1-r)^i$

$$= 100 \frac{(1-r)^n - 1}{(1-r) - 1} = 100 \frac{(1-r)^n - 1}{-r}$$

$$S_n = \frac{100}{r}\left(1 - (1-r)^n\right)$$

$0 < r \leq 1 \qquad (1-r)^n \to 0$ når $n \to \infty$

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \underline{\underline{\frac{100}{r}}}$$

Hvis $r = 0.01 = 1\%$ så er $S = \frac{100}{0.01} = \underline{10\,000}$

Anta at en fabrikk slipper ut
1 tonn giftige kjemikalier per uke.
Fabrikken reduserer utslippe med 5%
per uke fra og med neste uke.
Hva blir det maksimale utslippet fra
og med denne uken (hvor utslippet er 1 tonn)?

$$1 \text{ tonn} \left(1 + \overbrace{(0.95)}^{1-0.05} + (0.95)^2 + \cdots \right)$$

$$1 \text{ tonn} \cdot \frac{1}{0.05} = \underline{20 \text{ tonn}}$$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$
$$|x| < 1$$

Rekken divergerer (ikke konvergerer) når $|x| \geq 1$