Aritmetiske følger og rekker

Aritmetisk følge : $a_{n+1} - a_n = d$ konstant

$a_{n+1} = a_n + d$

$\underline{a_n = a_1 + (n-1)d}$

Eks $1, 2, 3, 4, \ldots, n$ $a_1 = 1,\ d = 1$

$-4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \ldots$ $a_1 = -4,\ d = 3$

$a_n = -4 + (n-1)\cdot 3 = 3n - 7$

<u>oppg</u> $a_4 = 5$ $a_6 = -1$ aritmetisk følge.

Hva er ledd a_n (og a_1)?

$2 \cdot d = a_6 - a_4 = -1 - (5) = -6$ så $d = -3$.

$a_n = d \cdot n + \overset{k}{\text{konst}}.$

$5 = a_4 = (-3)\cdot 4 + k = -12 + k$ så $k = 17$

og $a_n = \underline{17 - 3 \cdot n}$

<u>oppg</u> Kan følgen som har $a_1 = 1$ $a_3 = 5$ og $a_{13} = 25$ være en aritmetisk følge?

Hvis mulig, hva er a_n i den aritmetiske følgen hvor leddene har disse tre verdiene.

$a_1 = 1$ og $a_3 = 5$ gir at $2 \cdot d = a_3 - a_1 = 5 - 1 = 4$

$d = 2$

Den aritmetiske følge med $a_1 = 1$ og $d = 2$ må ha $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$

Dette gir oss $a_{13} = 2 \cdot 13 - 1 = 26 - 1 = \underline{25}$

så følgen vår <u>kan</u> være en aritmetisk følge, og hvis den er det så er $a_n = 2n - 1$.

$\{b_n\}$ aritmetisk følge

$b_1 = 2$ og $b_8 = 3$

hva er b_n?

$b_8 = b_1 + 7d$ så $7d = b_8 - b_1 = 3 - 2 = 1$

$d = \frac{1}{7}$. $b_n = b_1 + (n-1)\cdot d = \underline{2 + \frac{1}{7}(n-1)}$

Aritmetiske rekker

Rekken tilordnet $1, 2, 3, \ldots, n$ er $1 + 2 + 3 + \cdots + n$

$(1, 2, 3, \ldots)$

$(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots)$ har ingen sum

Vi såg sist gang at summen er lik

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

sum av aritmetiske rekker:

$$a_i = a_1 + (i-1)\cdot d$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} \big(\underbrace{a_1 + (i-1)\cdot d}_{(a_1 - d) + d\cdot i}\big)$$

$$S_n = n\cdot(a_1 - d) + d \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= n(a_1 - d) + d\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= n\left[a_1 - d + d\,\frac{(n+1)}{2}\right] = \frac{n}{2}\left[2a_1 - 2d + d(n+1)\right]$$

$$S_n = \underline{\frac{n}{2}\left[2a_1 + d(n-1)\right]}$$

(Siden $a_n = a_1 + d(n-1)$:)

$$S_n = \frac{n}{2}\big[a_1 + \underbrace{(a_1 + d(n-1))}_{a_n}\big]$$

$$S_n = \underline{\frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

oppg. Hvor mange ledd må vi ha med i rekken $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$ for at summen skal bli minst 100?
Hva er den minste summen ≥ 100?

Summen av de n første leddene er $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \geq 100 \iff n(n+1) \geq 200$
$(\geq n^2)$ og $\sqrt{200} \approx 14,4$

$14 \cdot (14+1) = 14 \cdot 15 = 14(10+5) = 140 + 70 = 210$

Sjekker 13: $13 \cdot 14 = (10+3)(10+4) = 182 < 200$

$n = 14$ er det minste antall ledd for at summen skal bli minst 100. Summen er da $\frac{210}{2} = \underline{105}$

<u>oppg</u> $a_1 = 5$ $d = 2$

Vi legger sammen ledd helt til summen blir 2021. Hvor mange ledd har vi da lagt sammen

$S_n = \frac{n}{2}\left[2 \cdot a_1 + d(n-1)\right]$.

Dette gir en 2. gradslikning i n. Vi løser den og får $n = 43$.

Finn summen av alle naturlige tall mindre enn eller lik 1000 som er delelige med både 6 og 15.

$6 = 2 \cdot 3$

$15 = 5 \cdot 3$

m delelig med 6 og 15

$\iff m$ delelig med 2, 3 og 5

$\iff m$ delelig med $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

$a_n = 30 \cdot n$. Vi skal ta summen av alle leddene ≤ 1000.

$a_{33} = 990 < 1000 \qquad a_{34} = 1020 > 1000$

Summen er $\sum_{i=1}^{33} 30 \cdot i = 30(1 + 2 + \cdots + 33)$

$30 \cdot \frac{33 \cdot 34}{2} = \cdots = \underline{16830}$