17 Følger og rekker

En tallfølge er en ordna mengde med tall.

1. ledd, n-te ledd

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ endelig tallfølge

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ vendelig tallfølge

(eller bare $a_1, a_2, a_3, \ldots$)

Eksempel $1, 3, 5, 7$ / $7, 1, 5, 3$ to ulike tallfølger

$1, 2, 3, \ldots$ vendelig tallfølge
de naturlige tallene.

$a_n = n$.

1 ledd, 2. ledd, ledd (n+1)

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$

$1, 1, 1, 1, \ldots$ tallfølge $a_n = 1$ for alle n.

Kvadrattallene $a_n = n^2$

$1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$

Funksjoner gir opphav til tallfølger
f funksjon def på $\mathbb{N}$

$a_n = f(n)$.

Eks $\sin(1), \sin(2), \sin(3), \ldots$

Primtall ordnet etter størrelse vendelig tallfølge.

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$

Ingen kjent formel for primtall nr. n.

En tallfølge er gitt rekursivt hvis ledd n kan bestemmes fra foregående ledd

Eks $x_{n+1} = x_n + 2$ $x_1 = 1$

positive oddetall ordnet etter størrelse

$x_2 = 1+2 = 3$

$x_3 = 3+2 = 5$

$x_4 = 5+2 = 7$

En formel for: $x_n = 2 \cdot n - 1$

gir: $x_{1500} = 2999$ uten å måtte regne ut leddene imellom.

En tallfølge $x_0, x_1, \dots$ er gitt rekursivt ved $x_0 = 1$ og $x_n = x_0 + \cdots + x_{n-1}$, $n \geq 1$

$x_0 = 1$

$x_n = 2^{n-1}$ $n \geq 1$

$x_0 = 1$

$x_1 = x_0 = 1$

$x_2 = x_0 + x_1 = 2$

$x_3 = 4$

$x_4 = 8 \dots$

$$x_{n+1} = x_n + \overbrace{(x_{n-1} + \cdots + x_0)}^{x_n} = 2 \cdot x_n \qquad n \geq 1$$

så $x_n = 2 \cdot x_{n-1} = 2 \cdot 2 \cdot x_{n-2} = \cdots = 2^{n-1} \cdot x_1 = 2^{n-1}$

Fibonacci følgen

$F_0, F_1, F_2, F_3, \dots$

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ $\qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad n \geq 1$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Formel for F_n

$$F_n = \frac{1}{\varphi + \frac{1}{\varphi}} \left(\varphi^n - (-1)^n \left(\frac{1}{\varphi}\right)^n \right) \quad n \geq 0$$

hvor $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \sim 1.618$ det gylne snitt.

Endelige rekker

$a_1, a_2, \dots, a_n$

rekken tilordnet tallfølgen $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

Summen til rekken er verdien til

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

Eks $1, 2, 3, 4$

tilhørende rekke: $1+2+3+4$.

summen til rekken er 10.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Σ stor sigma

$$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = \sum_{i=4}^{8} a_i$$

$$= \sum_{i=0}^{4} a_{i+4}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 = \sum_{i=1}^{3} a_{2i}$$

Ek $\sum_{i=1}^{13} 3 = \left(\sum_{i=1}^{13} a_i \text{ hvor } a_i = 3 \text{ for alle } i \right)$

$$(\underbrace{3 + 3 + 3 + \cdots + 3}_{13 \text{ ledd}})$$

summen til rekken er lik $3 \cdot 13 = \underline{39}$

$1+2+3+4+\cdots+100$

$= \sum_{n=1}^{100} n \quad \left(= \sum_{i=1}^{100} a_i \text{ hvor } a_i = i\right)$

Generelt: summen til rekken er

$1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Vi stokker om på leddene: n jevn:

$\underbrace{(1+n)}_{n+1} + \underbrace{(2+(n-1))}_{n+1} + \underbrace{(3+(n-2))}_{n+1} + \cdots \underbrace{\left(\frac{n}{2} + \left(n-\frac{n}{2}\right)\right)}_{n+1}$

$n/2$ ledd så summen er lik

$\underline{(n+1)\cdot\frac{n}{2}}$

n odd $\quad \underbrace{(0+n)}_{n} + \underbrace{(1+(n-1))}_{n} + \cdots \underbrace{\left(\frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}\right)}_{n}$

$\frac{n+1}{2}$ ledd

summen er $\frac{n+1}{2}\cdot n = \frac{(n+1)n}{2}$

Dette er eksempel på en aritmetisk følge.

Vi sier at en vendelig følge $a_1, a_2, \ldots$ konverger til en verdi a hvis

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

$a_n = \frac{1}{n}$, $\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ konvergerer til 0

$a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ $\quad n \geq 1$ $\quad F_n$ $(n+1)$ - Fibonacci tall.

$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$ konvergerer til det gylne snitt φ.

$a_n = (-1)^n$ $\quad -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ konverger ikke

Vendelig rekke

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

n-te delsum $\quad S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

Vi får en følge av delsummer

$S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$

$(a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots)$

Rekken konvergerer og har sum S hvis følgen av delsummer konverger til S.

Ek $\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \qquad a_n = \frac{1}{2^n}$, $n \geq 0$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$
$$= 2 - \frac{1}{2^n}$$

Så $\lim_{n \to \infty} S_n = 2$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ konverger til 2 (har sum lik 2)