Differensial likninger

Likning i en funksjon $y(x)$, dens variabel x og deriverte av $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, ... $y^{(n)}(x)$.

Eks

1. ordens diff likninger
$$\begin{cases} y'(x) = x^2 \\ y'(x) = y(x) \\ y'(x) = -3\,y(x) + 2 \end{cases}$$

2. ordens diff likninger
$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \\ y''(x) = k\sqrt{1 + (y'(x))^2} \end{cases}$$
ikkje-linear diff. likning

5. ordens... $y^{(5)} + 4\,y^{(3)} + x^2 \cdot y^{(2)} = 3$

En diff. likning er av orden n hvis den n-te deriverte $y^{(n)}$ er med, men ingen høyere derivert.

En løsning til en diff. likning er en funksjon $y(x)$ som oppfyller likningen for alle verdier av x i et intervall.

$$y' = f(x)$$

En løsning til denne diff. likningen er en antiderivert til $f(x)$. Løsningene er bestemt av én parameter.

$$y'' = f(x) \qquad \text{La } F'(x) = f$$
$$y' = F(x) + C_1 \qquad \text{La } G' = F$$
$$y = G(x) + C_1 \cdot x + C_2$$

2 orden $\rightarrow$ Løsningene er bestemt av 2 parametre.

$$y''_{(t)} = -g \qquad \text{2 parametre}$$

Gir $\quad -\frac{g}{2}t^2 + V_0 t + S_0$

For å bestemme en entydig løsning til en diff. likning må vi ha ekstra krav til funksjonen.

En diff likning av orden n har løsninger styrt av n parametre. (n frihetsgrader)

n- verdier av $y(x)$: randbetingelse

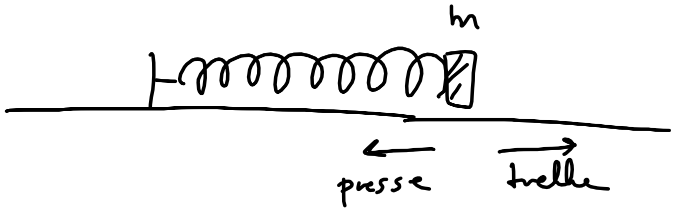
verdier til $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$: initialbetingelse

En diff. likning kalles lineær hvis $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ forekommer lineært.

En generell 2. ordens lineær diff likning

$$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x) \cdot y = d(x)$$

Harmonisk svingning



Newtons 2. lov

$$m \cdot x'' = F = -kx$$

↑ masse ↑ fjærstivhet >0

Anta kraften er proporsjonal til utslaget fra jamvektsposisjon (og motsatt retn) $(x=0)$

Løsningene til $x'' = -\frac{k}{m}x$

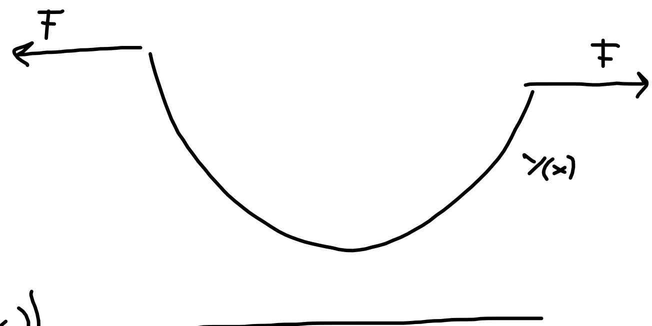
er $x(t) = a\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + b\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$

for parametre a og b.

Sett inn og sjekk at de faktisk er løsninger.

Viste geogebra animering av løsningene.

Hengende kjede



Høyden er beskrevet av

$$y(x) = c + \frac{1}{a}\cosh(a(x-x_0))$$

$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ hyperbolsk kosinus

$\cosh'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$ hyperbolsk sinus

Algebra: $\sinh^2 x + 1 = \cosh^2(x)$

Diff likningen som beskriver $y(x)$:

$$y'' = a\sqrt{1+(y')^2} \qquad a = \frac{\text{massetetthet} \cdot g}{F}$$

Eksponentiell vekst

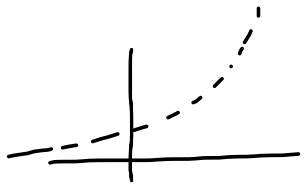
$y' = y$ 1. orden lineær diff. likning

Løsningene er $y(x) = ke^{x}$ k konstant

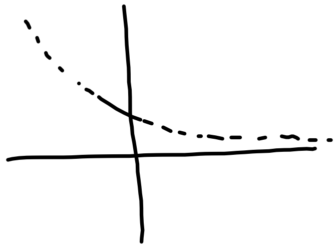
$y' = ay$

Løsningene er $\underline{y(x) = k \cdot e^{ax}}$

$a > 0$



$a < 0$



$a = 0$ $y' = 0$

$y(x) = k$ konstant funksjon.

Modelerer: Radioaktiv nedbryting $a < 0$

Forrentning $a > 0$

kontinuerlig rente r i prosent

$$y' = \left(1 + \frac{r}{100}\right) y - y = \frac{r}{100} y$$

$$\underline{y(t) = y_0 e^{\frac{r}{100} t}}$$

$r = 100\,\%$ årlig rente: Etter ett år $2 y_0$

kontinuerlig rente: Etter ett år $y_0 e^{1} \sim 2{,}71\, y_0$

Newtons avkjølingslov

$$T' = -k(T - T_0) \qquad k > 0$$

T_0 konstant temperatur til omgivelsene.

$T' = (T - T_0)'$ siden T_0 er konstant.

$(T - T_0)' = -k(T - T_0)$ (på formen $y' = -ky$ hvor $y = T - T_0$)

Derfor er løsningene gitt ved:

$T - T_0 = ce^{-kt}$ c konstant.

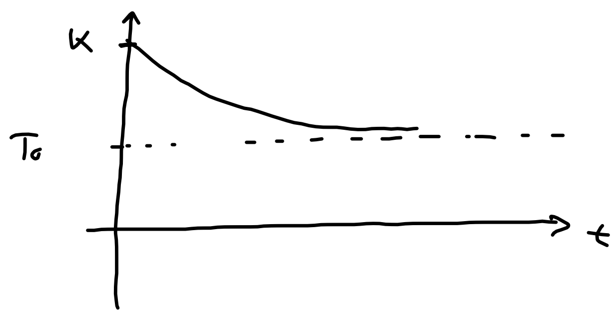
Hvis temperaturen ved $t = 0$ er K $(= T(0))$ hva er løsningen?

$T(t) = T_0 + ce^{-kt}$

Setter inn $t = 0$ $T(0) = K = T_0 + c \cdot \overset{1}{\overbrace{e^0}}$

så $c = K - T_0$

$$\underline{T(t) = T_0 + (K - T_0)e^{-kt}}$$



oppgave Ute temp. er $-20°C$

Inne temp er $20°C$

Slår av all oppvarming.

Det går 5 timer før temp. er $10°C$

Hvor lang tid tar det før temp er $0°C$?

$T_0 = -20°C$ $T(0) = 20°C$

$T(t) = -20° + (40°C)e^{-kt}$

Randverdiene $T(0) = 20°C$ $T(5) = 10°C$

Sette $t = 5$: $10°C = -20°C + (40°C)\, e^{-k\cdot 5}$

$$\frac{3}{4} = e^{-k\cdot 5}$$

$$\ln(3/4) = \ln 3 - \ln 4 = -k\cdot 5$$

så $k = \dfrac{\ln 4 - \ln 3}{5}$.

Vi ønsker å finne tiden t slik at T(t) = 0 grader Celsius. Vi setter inn i likningen og får da

0 = -20 + 40 exp(-kt). Dette gir: exp(-kt) = 1/2.

Vi tar logaritmen på begge sider og får kt = ln(2).

Setter vi inn for uttrykket for k ovenfor så får vi

t = 5 ln(2)/(ln(4) - ln(3)). Dette er tilnærmet lik 12.05 timer. Dette er 12 timer og 3 minutter.