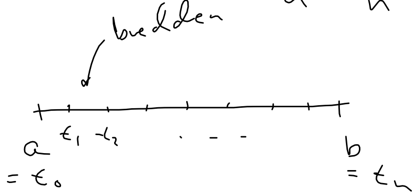
Numerisk integrasjon

Teknikker for å estimere bestemte integral. $\int_a^b f(x)\,dx$

- Benyttes fordi det er unødvendig, tidkrevende, vanskelig eller umulig(?) å finne $\int_a^b f(x)\,dx$ via en antiderivert for f.

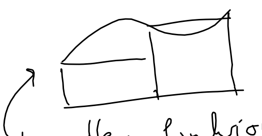
- Bare delvis informasjon om $f(x)$ er kjent. For eks verdiene til $f(x)$ for noen utvalgte x.

$$d = \frac{b-a}{n}$$



$$t_i = a + i \cdot d$$

Venstre Riemannsum

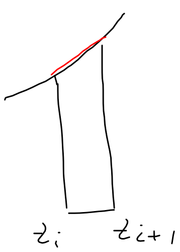


benytter funksjonsverdien til venstre

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \cdot d$$

Tilsvarende høyre sum $\quad R = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, d$

Trapesmetoden



(Trapes: Firkant hvor minst to av sidene er parallelle)

Tilnærmer arealet under kurven med arealet til trapeset:

$$\frac{1}{2}\left(f(t_i) + f(t_{i+1})\right) \cdot d$$

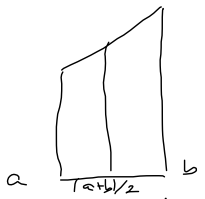
Tar summen av alle disse arealene $i = 0, \ldots, n-1$

$$T = \frac{1}{2} \cdot d \left[f(t_0) + f(t_1) + f(t_1) + f(t_2) + \ldots \right.$$

$$T = \frac{d}{2}\left[f(t_0) + 2f(t_1) + 2f(t_2) + \cdots + 2f(t_{n-1}) + f(t_n) \right.$$

$$T = \frac{1}{2}(L + R)$$

Simpsons metode



Vekting 1 4 1

$$\frac{f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{6}$$

gir eksakt areal m/forlegn
for 2. grads uttrykk
(vist på tavlen)

Deler intervallet i $2n$ like deler $d = \frac{b-a}{2n}$

1 4 1
1 4 1
1 4 1

$$S = \frac{d}{3}\Big[f(t_0) + 4f(t_1) + 2f(t_2) + 4f(t_3) + \cdots + 2f(t_{2n-2}) + 4f(t_{2n-1}) + f\,t_{2n} \Big]$$

Uttrykker dette som en kombinasjon av trapes og venstre estimater:

$$S = \frac{d}{3}\big[f(t_0) + 2f(t_2) + 2f(t_4) + \cdots + f\,t_{2n} \big] + \frac{4d}{3}\big[f(t_1) + f(t_3) + \cdots + f(t_{2n-1}) \big]$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{b-a}{n}\cdot\frac{1}{2}\big[f(t_0) + 2f(t_2) + \cdots + f(t_{2n}) \big] + \frac{2}{3}\left(\frac{b-a}{n}\right)\big[f(t_1) + f(t_3) + \cdots \; f(t_{2n-1}) \big]$$

$$= \frac{1}{3}T(f, a, b, n) + \frac{2}{3}L\left(f \;\; a + \frac{b-a}{2n},\, b + \frac{b-a}{2n},\, n\right)$$