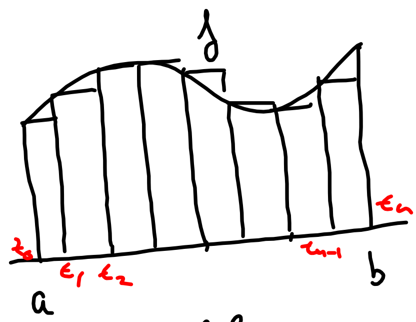
15.5 Bestemte integral som en sum

f kontinuerlig på $[a,b]$

f er da begrensa: Det finnes en N s.a.

$|f(x)| \leq N$ for alle $x \in [a,b]$.



Deler opp intervallet $[a,b]$ i n deler:

$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$

Hvis alle rektanglene er like brede så er

$\underline{t_{i+1} - t_i} = \frac{b-a}{n}$ og $t_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$

Venstre rektangulær sum (velger funksjonsverdien i punktet til venstre i delintervallene som høyde)

$$S = f(t_0)(t_1 - t_0) + f(t_1)(t_2 - t_1) + \cdots + f(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

Def. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \lim S$

grensen over alle oppdelinger av $[a,b]$ (omtrent etter forfining)

Dette fungerer fint når f er kontinuerlig.

Vi benyttet geogebra til å illustrere riemann summer og til å estimere integral. Benytt gjerne:

Rektangelsum

Vi gikk gjennom et notat om Riemann-summer for å gi en mer rigid gjennomgang av temaet enn det som er i boka.

Geogebra Lowersum Uppersum illustrere øvre og nedre Riemannsummer.

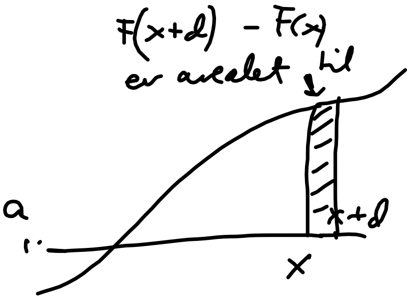
Fundamentalteoremet

f kontinuerlig.

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ er en antiderivert til $f(x)$.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)}$$

Fra def. av den deriverte er



$$\frac{d}{dx}F(x) = \lim_{d\to 0}\frac{F(x+d)-F(x)}{d}$$

$$= \lim_{d\to 0}\underbrace{\frac{1}{d}\int_x^{x+d} f(t)\,dt}_{\substack{\text{gjennomsnitshøyde} \\ \text{til } f(t) \text{ i } [x,\,x+d].}}$$

$$= f(x)$$

Dette gir $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b$

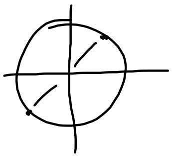
for en antiderivert G til f.

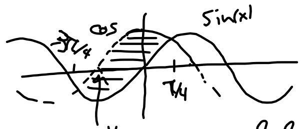
Vi vet $\int_a^x f(t)\,dt = G(x) + C$ ← konstant

begge er antideriverte til f.

Sett $x=a$: $0 = \int_a^a f(t)\,dt = G(a) + C$, så $C = -G(a)$

sett så $x=b$: $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) + C = G(b) - G(a)$.





Hva er arealet?

$$A = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x \, dx$$

$$= \sin(x) + \cos(x) \Big|_{-3\pi/4}^{\pi/4}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\,\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \underline{2\sqrt{2}}$$

substitusjon og bestemte integral

$$\int u'(x) \cdot f(x)\,dx = F(u(x)) + C, \text{ hvor}$$
F er en antiderivert til f.
$$= \int f(u)\,du$$

$$\int_a^b u'(x) f(x)\,dx = F(u(x)) \Big|_a^b$$
$$= F(u(b)) - F(u(a))$$
$$= \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

Eks $\int_{-1}^{3} \sqrt{2x+3}\,dx$

benytter substitusjonen
$u = 2x+3$
$u' = 2$
$\frac{du}{dx} = 2$
så $\frac{1}{2}du = dx$

$$= \int_{u(-1)}^{u(3)} \sqrt{u}\,\frac{1}{2}du$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^9 \sqrt{u}\,du$$
$$\frac{1}{2}\,\frac{u^{3/2}}{3/2}\Big|_1^9 = \frac{1}{3}u^{3/2}\Big|_1^9 = \frac{1}{3}\left(9^{3/2} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{3}(3^3 - 1) = \underline{\frac{26}{3}}$$

$$\int_2^3 \underbrace{2x}_{u'}\,\underbrace{e^{x^2}}_{e^u}\,dx = \int_{u(2)}^{u(3)} e^u\,du \qquad u = x^2$$
$$= \int_4^9 e^u\,du = e^u\Big|_4^9 = \underline{e^9 - e^4}.$$

Spørsmal

Hva er $\frac{d}{dt}\int_0^{t^2} e^{x^2}\,dx$?

Bruk fundamentalteoremet.

La $F(t) = \int_0^t e^{x^2}\,dx$

da er $F'(t) = e^{t^2}$.

$$\frac{d}{dt}\int_0^{t^2} e^{x^2}dx = \frac{d}{dt}F(t^2) = F'(t^2)\cdot(t^2)' \quad \text{(kjerne-regelen)}$$
$$= e^{(t^2)^2} \cdot 2t = \underline{2t\,e^{t^4}}$$