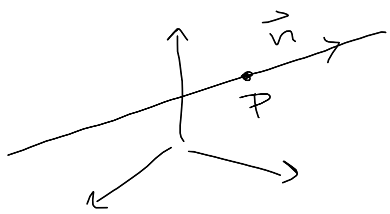
Linjer og plan i rommet



parameterfremstilling av en linje.

P punkt på linjen

$\vec{n}$ vektor ($\neq \vec{0}$) parallell til linjen.

punkt på linjen S : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{n}$, $t \in \mathbb{R}$

Eks parametriser linjen gjennom P(1, 2, 3) og Q(−1, 0, 2).

La $\vec{r} = \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$

$[1, 2, 3] - [-1, 0, 2]$

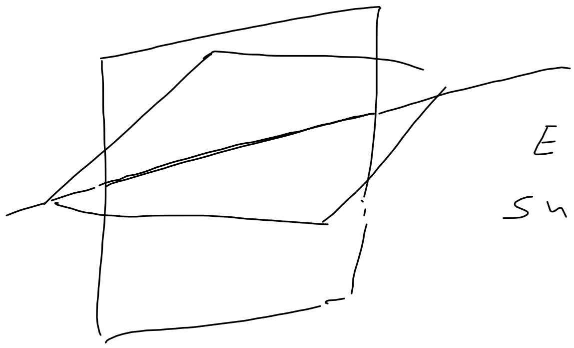
$\vec{r} = [2, 2, 1]$

En parametrisering av linjen er :

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OQ} + t[2, 2, 1] = [-1, 0, 2] + t[2, 2, 1]$

S(x, y, z) :

$$x = -1 + 2t$$
$$y = \quad + 2t$$
$$z = 2 + t$$



En linje er snittet av to plan.

Gitt to plan
$$2x - y + 3z = 4$$
$$x \quad - 2z = -1$$

snittet er en linje l.
parametriser linjen l:

Vi finner et punkt på linjen. Vi ser at $P(1,1,1)$ er et punkt på linjen (felles løsning)

Linjen l står vinkelrett på normalvektorene til begge plana. Derfor er den parallell til vektorproduktet av normalvektorer til plana.

$\vec{n}_1 = [2, -1, 3]$ $\qquad n_2 = [1, 0 -2]$

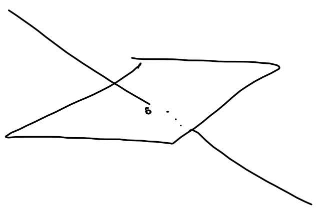
La retningsvektoren til linjen være $\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

$$\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$
$$= [2, 7, 1]$$

parametrisering av l
$$x = 1 + 2t$$
$$y = 1 + 7t$$
$$z = 1 + t$$

Oppg. Linje l :
$$x = 1 + t$$
$$y = -2t$$
$$z = -2 + 3t$$

Plan $x + y + 2z = 2$



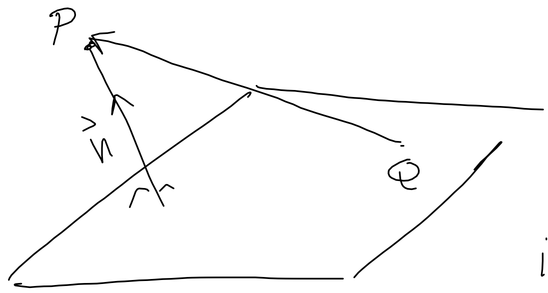
Finn snittpunktet mellom linjen og planet.

Setter inn de parametriserte koordinatene for linjen i likningen for planet:

$$(1+t) + (-2t) + 2(-2+3t) = 2$$
$$t - 2t + 2\cdot 3t + 1 + 2(-2) = 2$$
$$5t = 2 - 1 + 4 = 5$$
$$\underline{t = 1}$$

Koordinaten på linjen når $t=1$ er $\underline{\underline{(2,-2,1)}}$

$\vec{n}$ normal vektor til planet



Q et punkt i planet.

Korteste avstand fra planet til P er lengden på komponenten til $\overrightarrow{QP}$ langs $\vec{n}$. Dette er lik $\left| \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$.

Eks. Finn korteste avstand mellom punktet $P(1, 0, 2)$ og linjen $x - y + 4z = -2$

En normalvektor er gitt ved $\vec{n} = [1, -1, 4]$.

Punktet $Q(-2, 0, 0)$ ligger i planet.

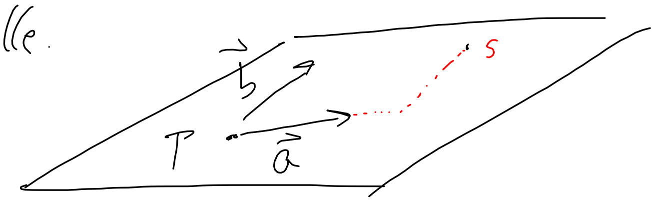
$$\overrightarrow{QP} = [1, 0, 2] - [-2, 0, 0] = [3, 0, 2].$$

Korteste avstand er $\left| \overrightarrow{QP} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| [3, 0, 2] \cdot \frac{[1, -1, 4]}{\sqrt{18}} \right|$

$$= \left| \frac{3 + 0 + 2 \cdot 4}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} \right| = \underline{\underline{\frac{11}{3\sqrt{2}}}}$$

parametrisering av plan

$\vec{a}, \vec{b}$ ikkje parallelle.



planet som inneholder P og som er utspent av vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ består av punkt S

$$\vec{OS} = \vec{OP} + s\vec{a} + t \cdot \vec{b}$$

parameterfremstilling av planet

Eks. $P(1, 0, -2)$ $\vec{a} = [1, 1, 0]$ $\vec{b} = [1, 0, 2]$

$$\begin{aligned} x &= 1 + s + t \\ y &= 0 + s \\ z &= -2 + 2t \end{aligned} \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

Oppgave Beskriv planet ovenfor som løsningen til en lineær likning.

En normalvektor til planet er $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = [2, -2, -1].$$

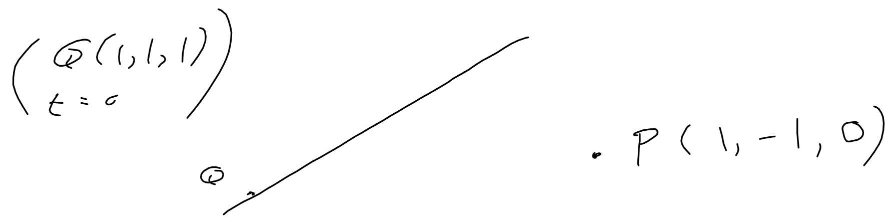
$Q(x, y, z)$ er i planet $\Leftrightarrow$ $\vec{PQ} \cdot \vec{n} = 0$

$$(\vec{OQ} - \vec{OP}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$[x, y, z] \cdot \vec{n} - [1, 0, -2] \cdot n = 0$$

$$+2x - 2y - z - (2 + 0 + 2) = 0$$

$$\underline{2x - 2y - z - 4 = 0}$$



linje parametrisert ved

$$x = 1 + 2s$$
$$y = 1 - 3s$$
$$z = 1 + s \quad , s \in \mathbb{R}$$

oppg Parametriser planet som inneholder linja og punktet.

vektoren $\vec{a} = [2, -3, 1]$ er parallell til linjen

vektoren $\overrightarrow{QP}$ er og parallell til planet.

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = [1,-1,0] - [1,1,1] = [0, -2, -1]$$

$$\vec{b} = -\overrightarrow{QP} = [0, 2, 1]$$ (parallell til $\overrightarrow{QP}$ og finere)

En parametrisering av planet er:

$$x = 1 + 2s$$
$$y = 1 - 3s + 2t$$
$$z = 1 + s + t$$
$$(Q) + (s\vec{a}) + (t\vec{b})$$