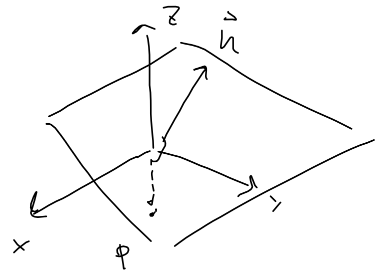
14.7 Plan

$\vec{n} \neq \vec{0}$

P punkt $\{P \mid \vec{OP} \cdot \vec{n}\}$

Alle punkt P slik at $\vec{OP}$ står vinkelrett på $\vec{n}$

Dette er et plan gjennom origo.



$\vec{n} = [1, 2, -3]$

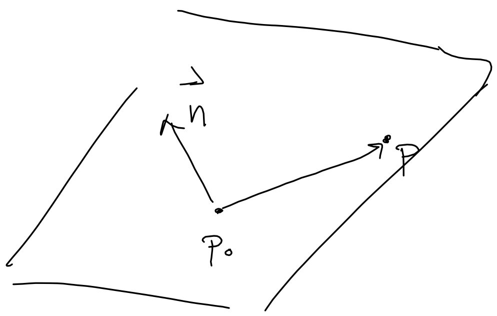
$P(x, y, z)$

Planet vinkelrett på $\vec{n}$ gjennom origo består av alle P slik at $\vec{OP} \cdot \vec{n}$

$$[x, y, z] \cdot [1, 2, -3] = 0$$

$$\underline{x + 2y - 3z = 0}$$

Likning for planet normalt til $\vec{n} = [1, 2, -3]$ som går gjennom $P_0(1, -1, 2)$



$\vec{n} \cdot \vec{P_0P} = 0$

$$[1, 2, -3] \cdot [x - 1, y - (-1), z - 2] = 0$$

$$(x-1) + 2(y+1) - 3(z-2) = 0$$

$$x + 2y - 3z = 1 - 2 - 6 = -7$$

$$\underline{x + 2y - 3z = -7}$$

Likningen $3x - 9y + 12z = 15$
beskriver et plan.

Finn en normalvektor til planet.
Finn også alle enhetsnormalvektorene

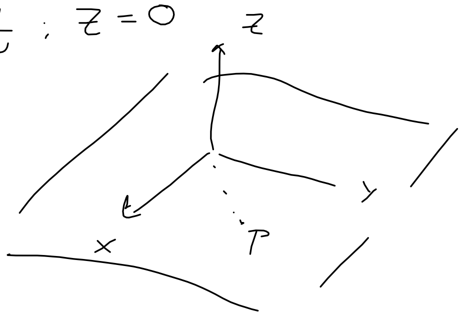
En normalvektor er $[3, -9, 12]$
en annen er $\vec{n} = [1, -3, 4]$ (ganget med $1/3$)

Én enhetsnormalvektor er $\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{26}}[1, -3, 4]$

Den andre — " — $-\frac{1}{\sqrt{26}}[1, -3, 4]$ (motsatt retning)

Et eksempel på et punkt i planet er $(1, 0, 1)$.
Et ——— planet som også ligger i xy planet er $(5, 0, 0)$

Likningen til xy planet : $z = 0$



En normalvektor er $[0,0,1]$
(parallell til z-aksen)
Origo ligger i planet.

$[x, y, z] \cdot [0, 0, 1] = \underline{z = 0}$

oppgave : Finn en likning som beskriver planet vinkelrett på $\left[-1, 2, -\frac{1}{2}\right]$ som går gjennom $P_0\left(3, \frac{1}{2}, 2\right)$.

Planet består av alle $P(x, y, z)$ slik at

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \left[-1, 2, -\frac{1}{2}\right] = 0$$

$$\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}\right) \cdot \left[-1, 2, -\frac{1}{2}\right] = 0$$

$$[x, y, z] \cdot \left[-1, 2, -\frac{1}{2}\right] = \overbrace{\left[3, \frac{1}{2}, 2\right]}^{\overrightarrow{OP}} \cdot \left[-1, 2, -\frac{1}{2}\right]$$

$$-x + 2y - \frac{1}{2}z = -3 + 1 - 1 = -3$$

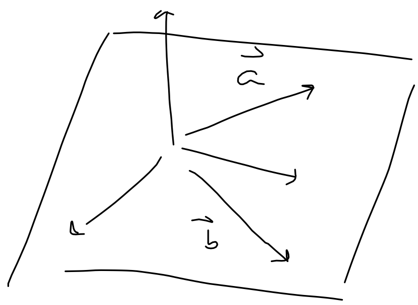
$$\underline{-x + 2y - \frac{1}{2}z = -3}$$

(Andre (ekvivalente likninger er $-2x + 4y - z = -6$
$-x + 2y - \frac{1}{2}z + 3 = 0$
$x - 2y + \frac{1}{2}z - 3 = 0$ etc)

Gitt to vektorer $\vec{a} = [-1, 2, 0]$ og
$\vec{b} = [3, 2, -1]$

Finn en likning til planet gjennom origo
slik at både $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle til planet.

En normalvektor til planet
er en vektor normal
til både $\vec{a}$ og $\vec{b}$.



En slik vektor $\vec{n}$
er kryssproduktet $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2\vec{i} - \vec{j}(1) + \vec{k}(-2-6)$$

$$= [-2, -1, -8]$$

Planet består av alle $P(x, y, z)$ s.a.

$\vec{OP} \cdot \vec{n} = 0$ $\quad [x, y, z] \cdot (-[2, 1, 8]) = 0$

$$\underline{2x + y + 8z = 0}$$

Vi kan parametrisere planet

De ulike punktene P i planet er gitt ved

$$\vec{OP} = \underbrace{s\vec{a} + t\vec{b}}_{\text{utspenner hele planet}} \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s + 3t \\ 2s + 2t \\ -t \end{bmatrix}$$

$x = -s + 3t$
$y = 2s + 2t$ $\quad$ parametrisering av planet
$z = -t$

Finn en likning for planet som inneholder punktene:

$A\,(1,0,0) \qquad B\,(0,1,0) \qquad C\,(0,0,2)$

Vektorene $\vec{AB} = [-1, 1, 0]$ er parallelle til planet.

$\vec{AC} = [-1, 0, 2]$

En normalvektor er derfor

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = [2, 2, 1]$$

Planet består av alle $P(x, y, z)$ slik at

$\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0$

$[x-1, y, z] \cdot [2, 2, 1]$

$$\underline{2x + 2y + z = 2}$$