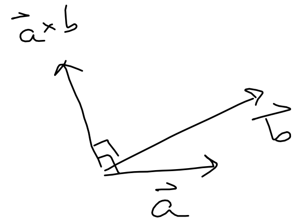
Vektorprodukt
(kryssprodukt)

$\vec{a} \times \vec{b}$ tar inn to vektorer og gir én vektor

(leses: "$\vec{a}$ kryss $\vec{b}$")

Definisjon:

- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$
  v vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ er vinkelrett på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$
- Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikkje er parallelle (så de utspenner et plan), da er $\vec{a} \times \vec{b}$ rettet slik at $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ er et høyrehandsystem.



Egenskaper

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ parallelle $\iff$ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (antikommutativ)

$$\left.\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{c}) \times \vec{b} &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b} \\ (t\vec{a}) \times \vec{b} &= t(\vec{a} \times \vec{b}) \end{aligned}\right\}$$

(ikkje opplagt)

Kryssproduktet er lineært i begge vektorene.

Eksempler Basis enhetsvektorene

$$\vec{i} = \vec{e}_1 = [1, 0, 0]$$
$$\vec{j} = \vec{e}_2 = [0, 1, 0]$$
$$\vec{k} = \vec{e}_3 = [0, 0, 1]$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}$$

(lengden er $|\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \sin 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$)

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{i} = -\vec{j}$$
$$\vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}$$

($\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$ etc.)

Kryssproduktet er ikkje assosiativt

(typisk er $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$)

$$\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{i} + \vec{k} = -\vec{j}$$
$$(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j} = \vec{0} \times \vec{j} = \vec{0}$$

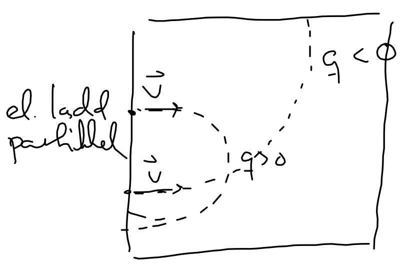
Resultat $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ er vinkelrett på en normalvektor til både $\vec{b}$ og $\vec{c}$.
Den ligger derfor i planet utspent av $\vec{b}$ og $\vec{c}$.

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{c}.$$

Eksempel fra fysikk.

Elektrisk ladd partikkel med ladning q og hastighet $\vec{v}$ i et magnetisk felt $\vec{B}$ (homogent) utsettes for kraften

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$



Homogent magnetfelt ut av planet

Boblekammer.

Kryssproduktet på koordinatform.

Det kan uttrykkes ved en 3x3 determinant.

$\vec{u}_1 = [x_1, y_1, z_1]$. $\quad \vec{u}_2 = [x_2, y_2, z_2]$

$= x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \quad \ldots$

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$$

$$\underbrace{x_1x_2\,\vec{i}\times\vec{i}}_{\vec{0}} + x_1y_2\underbrace{\vec{i}\times\vec{j}}_{\vec{k}} + x_1z_2\underbrace{\vec{i}\times\vec{k}}_{-\vec{j}}$$

$$y_1x_2\underbrace{\vec{j}\times\vec{i}}_{-\vec{k}} + \underbrace{y_1y_2\,\vec{j}\times\vec{j}}_{\vec{0}} + y_1z_2\underbrace{\vec{j}\times\vec{k}}_{\vec{i}}$$

$$z_1x_2\underbrace{\vec{k}\times\vec{i}}_{\vec{j}} + z_1y_2\underbrace{\vec{k}\times\vec{j}}_{-\vec{i}} + \underbrace{z_1z_2\,\vec{k}\times\vec{k}}_{\vec{0}}$$

$$(y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + \overbrace{(-(x_1z_2 - z_1x_2))}^{z_1x_2 - x_1z_2}\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} + -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Eksempel $\vec{a} = [1, 2, 0]$

$\vec{b} = [3, 5, 7]$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 14\vec{i} - 7\vec{j} + (-1)\vec{k}$$

$$= [14, -7, -1]$$

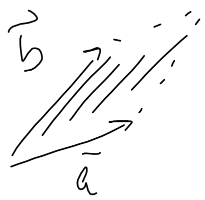
(Vi observerer at $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$ og $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$
Dette er en fin test for å sjekke om $\vec{a} \times \vec{b}$ er riktig)

($\sin v = \dfrac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ v bare best opp til θ eller $180° - \theta$.

mer arbeid å regne ut $|\vec{a} \times \vec{b}|$ enn $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
Vi bruker derfor heller skalarproduktet til å finne vinkler mellom vektorer.)

Hva er arealet til parallellogrammet utspent av vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i eks. ovenfor?

$A = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin v$.



Dette er presis lik $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |[14, -7, -1]| = \sqrt{(2\cdot 7)^2 + (-7)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{5 \cdot 49 + 1} = \underline{\sqrt{246}}$

2-vektorer $[x_1, y_1]$ og $[x_2, y_2]$

Legger dem inn i 3-rommet og får kryssproduktet

$[x_1, y_1, 0] \times [x_2, y_2, 0]$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}_{\text{positiv}} \vec{k}$$

hvis $[x_1, y_1], [x_2, y_2], k$ er et høyrehandsystem.