Skalarproduktet

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \cos(v)$$

hvor v er vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$

skalarproduktet er lineært i begge vektorene:

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\cdot\vec{b} = \vec{a}_1\cdot\vec{b} + \vec{a}_2\cdot\vec{b}$$

$$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

Tilsvarende for $\vec{b}$ $\qquad (\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a})$

$$\vec{a}_1 = [x_1, y_1, z_1] = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$$

$$\vec{a}_2 = [x_2, y_2, z_2] = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 = |\vec{e}_1|^2 = 1, \quad \vec{e}_2\,\vec{e}_2 = 1, \quad \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 = 1$$

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = 0 \text{ for } i \neq j$$

Linearitet giv

$$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 = (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3)\cdot(x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_3\vec{e}_3)$$

$$x_1x_2|\vec{e}_1|^2 + y_1y_2|\vec{e}_2|^2 + z_1\cdot z_2|\vec{e}_3|^2$$

$$+ (x_1\vec{e}_1)\cdot(y_2\vec{e}_2) + (x_1\vec{e}_1)\cdot(z_3\vec{e}_3) + x_1x_2\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 + y_1z_3\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3$$

$$+ z_1\vec{e}_3\cdot x_2\vec{e}_1 + z_1\vec{e}_3\cdot y_2\vec{e}_2$$

blir 0

$$[x_1, y_1, z_1]\cdot[x_2, y_2, z_2] = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Skalarprodukt mellom

$\vec{a} = [1, 2, 2]$ og $\vec{b} = [3, 0\ 4]$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 4$

$= 3 + 8 = \underline{11}$

Oppg. Finn vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

$\left(|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)$

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5$

$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{11}{3 \cdot 5} = \frac{11}{15}$

$v = \arccos\left(\frac{11}{15}\right) \cong \underline{42.8^\circ}$

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale $\vec{a} \perp \vec{b}$

$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ og $\vec{a} \neq \vec{0}$ og $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Bestem t slik at $[t, t^3, t^2]$ er ortogonal til $[-6, 2, -4]$.

$[t, t^3, t^2] \cdot [-6, 2, -4]$

$= -6t + 2t^3 - 4t^2 = 2t(t^2 - 2t - 3)$

$= 2t(t-3)(t+1)$

skalarproduktet er lik null for $t = -1, 0$ og 3.

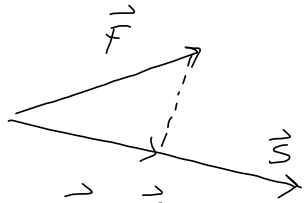
Vektoren $[t, t^2, t^3] = \vec{0}$ når $t = 0$, så vektorene er ikkje ortogonale da.

Vektorene er ortogonale for $\underline{t = -1 \text{ og } 3}$

Eks Et objekt blir slept i rett bane fra $A:(1, 2, -3)$ til $B:(4, 5, 3)$

Det virker en konstant kraft $\vec{F} = [4, 2, 3]$ på legemet.

Hvor stort arbeide utføres?

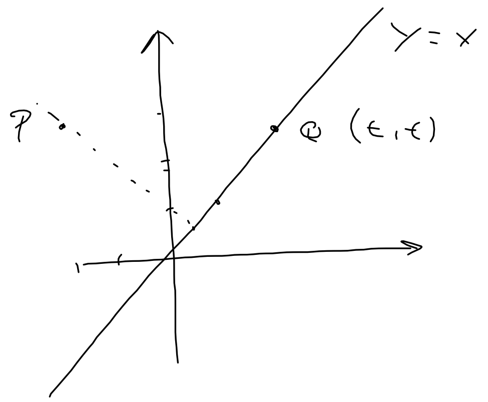


$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$
$$= [4, 5, 3] - [1, 2, -3]$$
$$= [3, 3, 6] = 3[1, 1, 2].$$

Arbeidet:
$$W = [4, 2, 3] \cdot 3[1, 1, 2]$$
$$= 3(4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2) = 3 \cdot 12$$
$$= \underline{\underline{36}}$$

Finn korteste avstand fra punktet $P(-2,3)$ til linjen gitt ved $y=x$.



En retningsvektor til linjen $y=x$ er $[1,1]$.

Beveger oss langs linjen med $Q(t,t)$ og bestemmer Q slik at $\vec{PQ}$ står vinkelrett på linjen $y=x$

$\vec{PQ} = [t-(-2), t-3] = [t+2, t-3]$

$\vec{PQ} \perp [1,1] \iff \vec{PQ} \cdot [1,1] = 0$ (vektorene $\neq \vec{0}$)

$t+2+t-3 = 2t-1 = 0$. så $\underline{t = 1/2}$

(korteste) avstand mellom linjen og P er $|\vec{PQ}| = |[\frac{1}{2}+2, \frac{1}{2}-3]| = |[\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}]| = |\frac{5}{2}[1,-1]|$

$= \frac{5}{2} \cdot \sqrt{2} = \underline{5/\sqrt{2}}$

$\left(5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

Eksempel

Finn korteste avstand mellom linjen, som går gjennom A og B, og punkt P

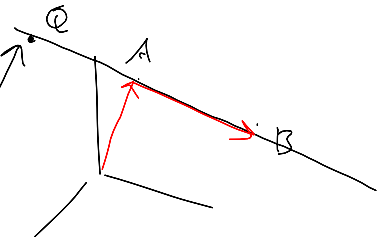
$A(7, 3, 11)$ $\qquad P = (8, 3, 5)$

$B(5, 9, 10)$

$\vec{AB} = [-2, 6, -1]$ retningsvektoren til linjen.

La Q være punkt på linjen parametrisert ved $\vec{OQ} = \vec{OA} + t\,\vec{AB}$

$= [7, 3, 11] + t[-2, 6, -1]$



$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$

$= [7, 3, 11] - [8, 3, 5] + t[-2, 6, -1]$

$= [-1, 0, 6] + t[-2, 6, -1].$ (linjen)

Q er nærmest P når $\vec{PQ} \perp \vec{AB}$

$\vec{PQ} \cdot \vec{AB} = 0$

$\left([-1, 0, 6] + t[-2, 6, -1]\right)[-2, 6, -1] = 0$

$\underbrace{(2 + 0 - 6)}_{-4} + t\,\underbrace{\left((-2)^2 + 6^2 + (-1)^2\right)}_{4 + 36 + 1} = 0$

$-4 + 41 \cdot t = 0$ så $t = \frac{4}{41}$ $\left(\sim \frac{1}{10}\right)$

Så $\vec{PQ}$ er da $[-1, 0, 6] + \frac{4}{41}[-2, 6, -1]$

$= \frac{1}{41}\left([-41, 0, 246] + [-8, 24, -4]\right)$

$= \frac{1}{41}[-49, 24, 242]$

Korteste avstand er $|\vec{PQ}|$ (avstanden mellom punktet og linje)