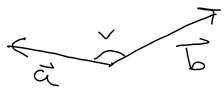
Egenskaper til skalarproduktet

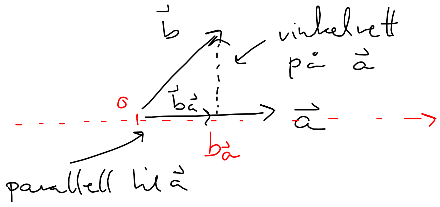
Skalarproduktet $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos v$



Egenskaper: $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (kommutativt)

skalarmult. er lineær i andre vektor
$$\begin{cases} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot (t\vec{b}) = t(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{cases}$$

Kommutativitet gir at skalarproduktet også er lineært i den første vektoren. $\big(\underset{\text{første}}{\vec{a}} \cdot \overset{\text{andre vektor}}{\vec{b}}$ i skalarproduktet$\big)$

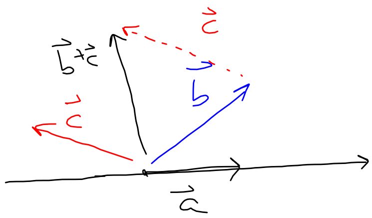


$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot b_{\vec{a}}$

$b_{\vec{a}} = |\vec{b}_{\vec{a}}|$ hvis $\vec{b}_{\vec{a}}$ og $\vec{a}$ har samme retning

$b_{\vec{a}} = -|\vec{b}_{\vec{a}}|$ hvis $\vec{b}_{\vec{a}}$ og $\vec{a}$ har motsatt retning.

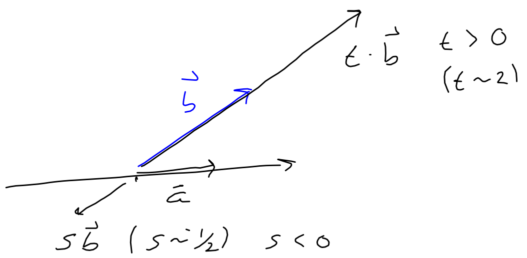
Viser linearitet:



$b_{\vec{a}} + c_{\vec{a}} = (b+c)_{\vec{a}}$

ganger med $|\vec{a}|$ gir

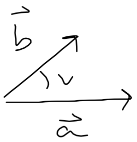
$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$



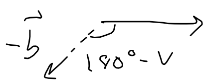
$(x\vec{b})_{\vec{a}} = x \cdot (\vec{b})_{\vec{a}}$

$x \in \mathbb{R}$

Viser også direkte fra def. av $(-\vec{a}) \cdot \vec{b} = -(\vec{a} \cdot \vec{b})$



$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos v$



$$\vec{a} \cdot (-\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \underbrace{|-\vec{b}|}_{|\vec{b}|} \underbrace{\cos(180 - v)}_{(-\cos(v))}$$
$$= -|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos(v) = -\vec{a} \cdot \vec{b}$$

eks La $u = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ og $\vec{v} = -\vec{a} + \vec{b}$

Hvis $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$ og $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$,

hva er da $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (-a + \vec{b})$$

$$= 2\vec{a} \cdot (\overbrace{-\vec{a}}^{(-1)\cdot\vec{a}} + \vec{b}) + 3\vec{b} \cdot (-\vec{a} + \vec{b})$$

$$= -2\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{a}}_{|\vec{a}|^2} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\underbrace{\vec{b} \cdot \vec{a}}_{\vec{a} \cdot \vec{b}} + 3\underbrace{\vec{b} \cdot \vec{b}}_{|\vec{b}|^2}$$

$$= -2|\vec{a}|^2 - 1 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + 3|\vec{b}|^2$$

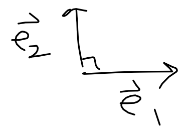
$$= -2 \cdot 3^2 - 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1^2$$

$$= -18 + 2 + 3 = \underline{-13}$$

Linearitet av skalarproduktet gir formelen for skalarproduktet på koordinatform

$[x_1, y_1] = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$ $[x_2, y_2] = x_2\vec{e} + y_2\vec{e}_2$

$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$ $|\vec{e}_1| = 1 = |\vec{e}_2|$



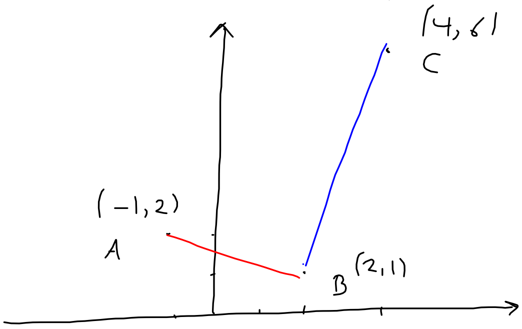
$$[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2)(x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2)$$

$$x_1 \cdot x_2 \underbrace{|\vec{e}_1|^2}_{1} + y_1 \cdot y_2 \underbrace{|\vec{e}_2|^2}_{1} + x_1 y_2 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}_{0} + y_1 x_2 \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1}_{0}$$

$$= \underline{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}$$

Eks. gitt tre punkt A $(-1,2)$
B $(2,1)$ og C $(4,6)$

Er linjen mellom A og B vinkelrett på linjen mellom B og C? Hvis ikke hva er vinkelen mellom linjene?



$$\left(\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v} \text{ og } \vec{u}\cdot\vec{v} = 0\right)$$

Linjene er ortogonale $\iff \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = [-1,2] - [2,1] = [-3,1]$

$\overrightarrow{BC} = [4,6] - [2,1] = [2,5]$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = [-3,1]\cdot[2,5] = (-3)\cdot 2 + 1\cdot 5 = \underline{-1} \neq 0$

Linjene står ikke vinkelrett på hverandre.

Vi regner ut vinkelen mellom linjene:

$|\overrightarrow{BA}| = |[-3,1]| = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10}$

$|\overrightarrow{BC}| = |[2,5]| = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$

Vinkelen v mellom $\overrightarrow{BA}$ og $\overrightarrow{BC}$: $\cos v = \dfrac{-1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{29}}$

$v = 93.36°$

Vinkelen mellom linjene er derfor $180° - 93.36$

(den minste av de to vinklene mellom linjene) $= \underline{86.64°}$

13.7 Determinanter

2×2-matrise $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

(m×n-matrise $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{bmatrix}$

Rader →

Søyler ↓)

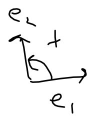
$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underline{a \cdot d - b \cdot c}$$

$$\overset{+ \qquad -}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{a} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{alle } \vec{a}.$$

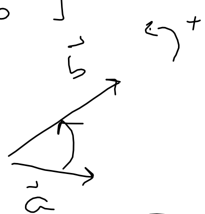
$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$



$$\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$

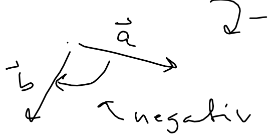
$$\det\begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} \vec{b} \\ \vec{a} \end{bmatrix}.$$

$\det\begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix} > 0$ hvis:



(Korteste vei fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ er mot klokken, positiv retning)

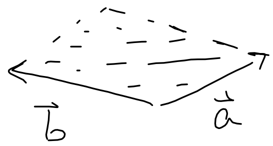
$\det\begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix} < 0$ hvis:



← negativ retning

$$\left.\begin{array}{l} \det\begin{bmatrix} [a & b] \\ [c & d] \end{bmatrix} = a \cdot d - bc \\ \det\left[\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right] = a \cdot d - c \cdot b \end{array}\right] \text{like.}$$

$\left| \det \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix} \right|$ = arealet til parallellogrammet



Arealet til trekanten gitt av $\vec{a}$ og $\vec{b}$

er $\frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix} \right|$

To vektorer $\vec{a}, \vec{b}$ er parallelle $\Leftrightarrow$ $\det \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix} = 0$

eks. Bestem x slik at $[2, x]$ og $[3, -4]$ er parallelle.

parallelle $\Leftrightarrow$ $\det \left(\begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \right) = 0$

$$2(-4) - 3 \cdot x = 0$$

$$-8 - 3x = 0$$

$$\underline{x = -8/3}$$

eks. Finn arealet til trekanten med hjørner $A\ (1, 2)$

$B\ (0, 3)$ og $C\ (4, 2)$

Vi finner $\vec{BA}$, $\vec{BC}$ og $\frac{1}{2} \left| \begin{matrix} \vec{BA} \\ \vec{BC} \end{matrix} \right|$.

$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = [1-0, 2-3] = [1, -1]$

$\vec{BC} = [4-0, 2-3] = [4, -1]$

Arealet er $\frac{1}{2} \left| \det \left(\begin{bmatrix} \vec{BA} \\ \vec{BC} \end{bmatrix} \right) \right|$

$= \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \underbrace{1(-1) - (-1) \cdot 4}_{-1 + 4} \right|$

$= \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$