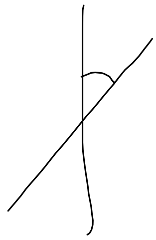
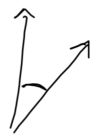
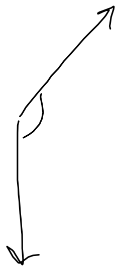
Vinkler mellom linjer og vektorer

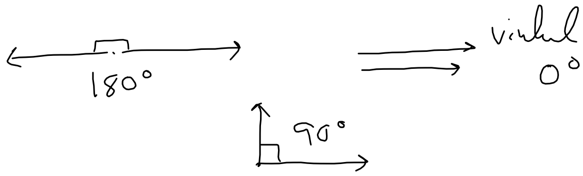






vinkelen mellom to linjer er mellom 0° og 90°

vinkelen mellom to vektorer er mellom 0° og 180°



13.2 Skalarproduktet

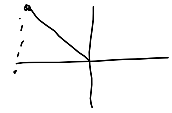
mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos V$$

hvor V er vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$

(Det kalles også prikk ($\cdot$) produktet)

eks $|\vec{a}| = 2$ $|\vec{b}| = 3$ $V = 135°$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(135°)$$

$$\quad 2 \quad 3 \quad \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= -2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -3\frac{2}{\sqrt{2}} = \underline{-3\sqrt{2}}$$

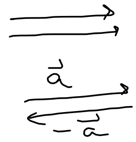
Hva er vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ når

$|\vec{a}| = \sqrt{2}$ $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ og $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos V$$

$$1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos V \quad \text{så} \quad \cos V = \frac{1}{2}$$

Så $\underline{V = 60°}$



$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$(-\vec{a})\cdot\vec{a} = \underbrace{|-\vec{a}|}\cdot|\vec{a}|\cos(180^\circ)$$

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\,(-1)$$

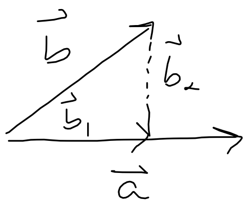
$$= -|\vec{a}|^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(v)$$

Hvis $|\vec{a}|\neq 0$ og $|\vec{b}|\neq 0$, da er $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ ekvivalent til $\vec{a}\perp\vec{b}$ (vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 90°)

Vi sier også at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.

Hvis minst en av $\vec{a}$ eller $\vec{b}$ er $\vec{0}$ — Vektorene er da parallelle (ikkje ortogonale)



$\vec{b}_1$ og $\vec{a}$ er paralle

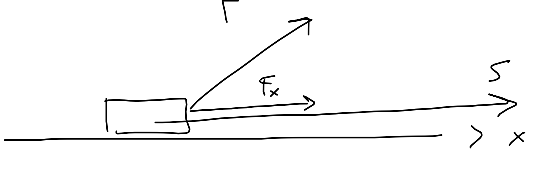
$\vec{b}_2$ og $\vec{a}$ er ortogonale

$$\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}|\cdot|\vec{b}_1| & \vec{a}, \vec{b}_1 \text{ samme retning} \\ -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}_1| & \text{— motsatt retning} \end{cases}$$

Arbeid (fra fysikk) er et eksempel på skalarprodukt

arbeid $W = \vec{F}\cdot\vec{s}$



Arbeidet er $F_x \cdot s$.

Skalarproduktet på koordinatform

$$[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

$\vec{a} = [x, y]$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{a} = [x, y] \cdot [x, y] = x^2 + y^2$

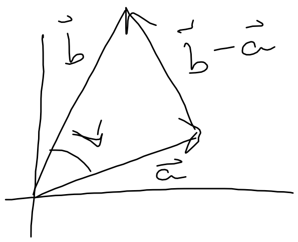
$$= |\vec{a}|^2$$

Eks * $[1, 2] \cdot [-3, 1] = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1$

$$= -3 + 2 = \underline{-1}$$

* $[3, 15] \cdot [-10, 2] = 3 \cdot (-10) + 15(2) = 0$

Så $[3, 15]$ og $[-10, 2]$ er ortogonale.



$|\vec{a}| = a$

$|\vec{b}| = b$

$|\vec{b} - \vec{a}| = c$

Kosinussetningen

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(v)$$

$$c^2 = |\underbrace{[x_2, y_2]}_{\vec{b}} - \underbrace{[x_1, y_1]}_{\vec{a}}|^2$$

$$= |(x_2 - x_1), (y_2 - y_1)|^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

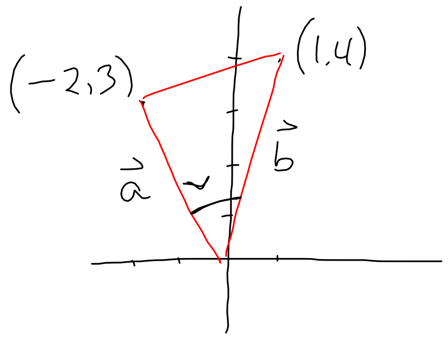
$$= x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + y_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2$$

$$= \underbrace{x_2^2 + y_2^2}_{|\vec{b}|^2} + \underbrace{x_1^2 + y_1^2}_{|\vec{a}|^2} - 2(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2)$$

Derfor må $\underline{a \cdot b \cos v = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}$

$$\left(a^2 + b^2 - 2ab\cos(v) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(x_1 x_2 + y_1 \cdot y_2)\right)$$

Bestem vinkelen v i trekanten:



$\vec{a} = [-2, 3]$

$\vec{b} = [1, 4]$

$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = [-2, 3] \cdot [1, 4] = -2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 10$

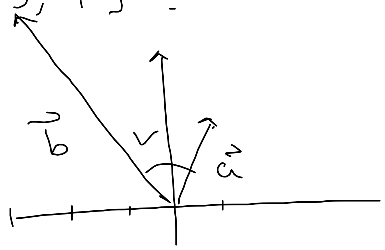
$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos v$

$10 = \sqrt{13} \cdot \sqrt{17} \cos v$

så $\cos v = \dfrac{10}{\sqrt{13 \cdot 17}}$.

Dette gir $v = \cos^{-1}\left(\dfrac{10}{\sqrt{13 \cdot 17}}\right) \sim \underline{47.7^\circ}$

<u>Oppg</u> Finn vinkelen mellom $\vec{a} = [1, 2]$ og $\vec{b} = [-3, 4]$.



$|\vec{a}| = \sqrt{5}$

$|\vec{b}| = 5$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 = 5$

$\cos v = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{5}{5 \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$v = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \simeq \underline{63.4^\circ}$

oppgave $\vec{a} = [1, 2]$

$\vec{b} = [3x, x^2]$ $x \in \mathbb{R}$

For hvilke verdier av x er $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$\vec{a} \neq \vec{0}$

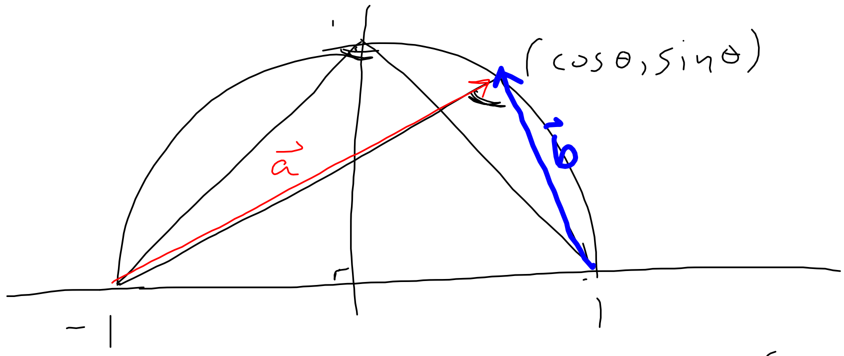
$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ og $\vec{b} \neq \vec{0}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = [1, 2] \cdot [3x, x^2] = 1 \cdot 3x + 2 \cdot x^2$$
$$= 3x + 2x^2$$
$$= x(3 + 2x)$$
$$= 0$$

når $x = 0$ og $x = -3/2$

$(\vec{b} = \vec{0})$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale bare for $\underline{x = -3/2}$



Alle trekanter med hjørner $(1,0)$, $(-1,0)$ og et punkt på enhetssirkelen er rettvinkla trekanter.

Dette er det samme som $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$$\vec{a} = \overrightarrow{(-1,0)(\cos\theta,\sin\theta)} = [\cos\theta + 1, \sin\theta]$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{(1,0)(\cos\theta,\sin\theta)} = [\cos\theta - 1, \sin\theta]$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) + \sin\theta\cdot\sin\theta \\ &= \cos^2\theta - 1 + \sin^2\theta \\ &= \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1} - 1 = \underline{0}\end{aligned}$$

for alle θ!