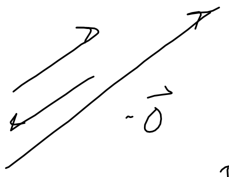
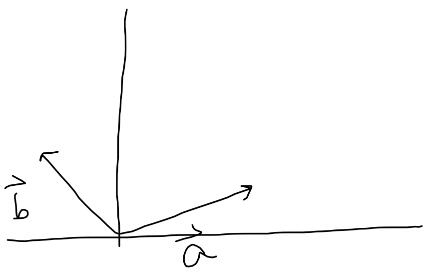
12.9



To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle hvis det finnes en skalar t slik at $t\vec{a} = \vec{b}$
eller $\vec{a} = \vec{0}$

Dette skrives gjerne $\vec{a} \parallel \vec{b}$



Anta $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikkje er parallelle ($\vec{a} \nparallel \vec{b}$)

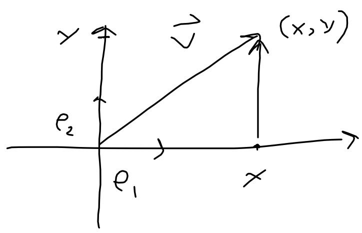
Resultat:

For en hver vektor $\vec{v}$ i planet så finnes det skalarer x og y slik at

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

skalarene er entydig bestemt av $\vec{v}$.

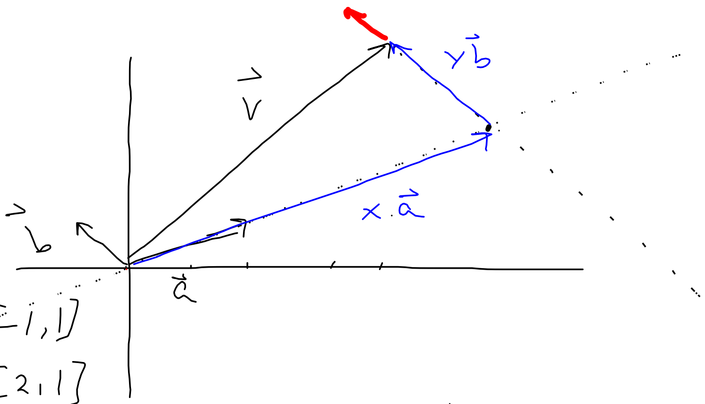
Eks. $\vec{a} = \vec{e}_1 \quad \vec{b} = \vec{e}_2$



$$\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

$$\vec{v} = [x, y]$$

I dette tilfellet er x og y vektorkoordinatene.



$$\vec v = x\vec a + y\vec b$$

$\vec b = [-1, 1]$

$\vec a = [2, 1]$

$\vec v = [5, 4]$

Vi bestemme x og y ved regning:

$$\vec v = [5,4] = x[2,1] + y[-1,1]$$
$$= [2x - y, x + y]$$

$\Leftrightarrow$ I $\quad 5 = 2x - y \qquad$ lineært likningssystem

II $\quad 4 = x + y$

I+II: $\quad 5 + 4 = (2x - y) + (x + y)$

$$9 = 2x + x = 3x$$

Så $\underline{x = 3}$

$\underline{y} = 4 - x = \underline{1}$

$$\underline{\vec v = 3\vec a + \vec b}$$

Vi viser at dekomponeringen er entydig

Anta $x_1\vec{a} + y_1\vec{b} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$.

Vi skal vise at $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ impliserer at $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$

Likheten ovenfor er ekvivalent til

$(x_1 - x_2)\vec{a} = (y_2 - y_1)\vec{b}$.

Anta $x_1 \neq x_2$, da er $(x_1 - x_2) \neq 0$

og $\vec{a} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}\vec{b}$. så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.

Dette er ikke mulig så $\underline{x_1 = x_2}$. Tilsvarende må $\underline{y_1 = y_2}$.

Oppgave $\vec{v} = [7, 8]$

$\vec{a} = [3, 1]$ $\vec{b} = [-1, 1]$.

Bestem x og y slik at $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{v}$.

$x[3,1] + y[-1,1] = [7,8]$

$3x - y = 7$ I

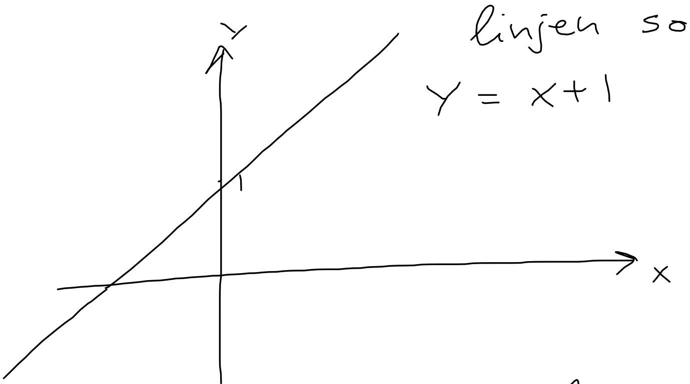
$x + y = 8$ II

I+II : $4x = 15$ så $x = \underline{\dfrac{15}{4}}$

$y = 8 - x = \dfrac{32}{4} - \dfrac{15}{4} = \underline{\dfrac{17}{4}}$

$\underline{\vec{v} = \dfrac{15\vec{a} + 17\vec{b}}{4}}$

13.1 Parameterfremstilling



linjen som grafen:

$y = x+1$

Alternativ beskrivelse av punktene på linjen som en parametrisering:

$$x = t+2 \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$y = t+3$$

En annen parametrisering av samme linje:

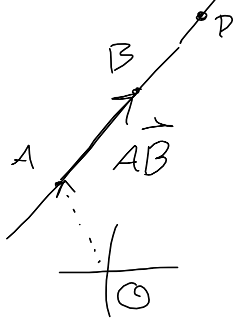
$$x = t^3+2 \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$y = t^3+3$$

Derimot er
$$x = t^2 \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$y = t^2+1$$

bare en parametrisering av linjen til høyre for y-aksen.

Vi kan tenke på parametriseringen som at det gir possisjonen i et gitt tidspunkt

Parameterfremstillinger brukes gjerne med vektorer :

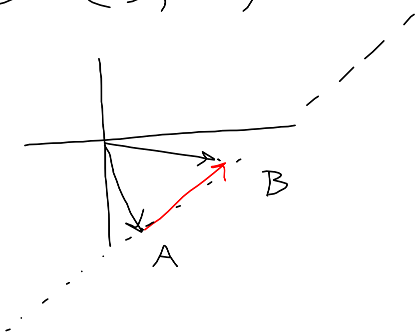


Punktene på linjen er alle P slik at

$$\vec{OP} = \vec{OA} + t\,\vec{AB} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Dette gir en parametrisering av linjen.

Eks $A\ (1,-3)$ og $B\ (3,-1)$



$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$
$$= [3,-1] - [1,-3]$$
$$= [3-1, -1-(-3)]$$
$$= [2, 2]$$

Parametriser linjen gjennom A og B

$$\vec{OP} = \vec{OA} + t\,\vec{AB}$$

P punkt på linjen

$$[x,y] = [1,-3] + t[2,2]$$
$$= [1+2t, -3+2t]$$

Linjen er gitt ved $\begin{aligned} x &= 1+2t \\ y &= -3+2t \end{aligned} \qquad t \in \mathbb{R}$

En vektor parallell til en linje
kalles en retningsvektor.

Parametrisering gitt et punkt på linjen (x_0, y_0)
og stigningstall a.

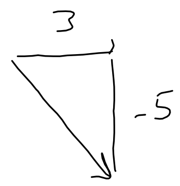
En retningsvektor for linjen er $[1, a]$.
Så en parametrisering er gitt ved

$$x = x_0 + t$$
$$y = y_0 + a \cdot t$$

oppgave: En linje er parametrisert
som
$$x = -2 + 3t$$
$$y = -3 - 5t$$

Hva er stigningstallet til linjen?
Beskriv linjen på formen $y = ax + b$

$$[x, y] = [-2, -3] + t[3, -5]$$



stigningstallet er $-5/3$

$t = 0$ gir punktet $(-2, -3)$

Ettpunktsformelen gir: $y = \frac{-5}{3}(x - x_0) + y_0$

$$= \frac{-5}{3}(x - (-2)) + (-3)$$

$$\underline{y = \frac{-5}{3}x - \frac{19}{3}}$$

Snitt av to parametriserte linje

$m \begin{cases} x = 2s - 1 \\ y = 3s + 2 \end{cases}$ $\quad l \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 3 \end{cases}$

Linjene møtes når både x og y -koordinatene er like:

$$2s - 1 = t + 2 \quad \text{I}$$
$$3s + 2 = t + 3 \quad \text{II}$$

$$\text{II} - \text{I}: \quad (3s+2) - (2s-1) = 1$$
$$s + 3 = 1$$
$$\underline{s = -2}$$

$$\left(t = (2s-1) - 2 = 2(-2) - 3 = -7 \right)$$

Linjene møtes i punktet $(2s-1, 3s+2)$ hvor $s = -2$

$\underline{(-5, -4)}$