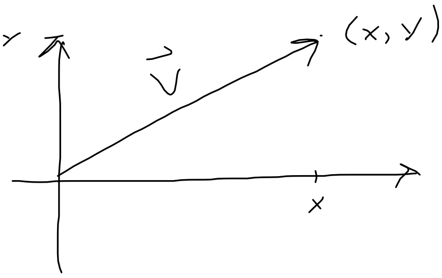
12.7 Lengde av vektorer

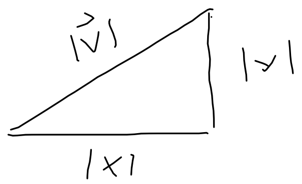
Lengden til en vektor betegnes $|\vec{v}|$

Det er et reelt tall ≥ 0.



$\vec{v}$ på koordinatform $[x, y]$

$|\vec{v}|$ er lengden til vektoren i koordinat-systemet

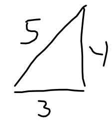


$$|\vec{v}|^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$$

$$\boxed{|\vec{v}| = |[x, y]| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Absoluttverdi, norm, lengde, størrelse betyr det samme.

$$|[3, 4]| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \underline{5}$$



$$|[1, -1]| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \underline{\sqrt{2}}$$

$$|-[1, -1]| = |[-1, 1]| = \underline{\sqrt{2}}$$

$$|2[1, -1]| = |[2, -2]| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$= 2\,|[1, -1]|$$

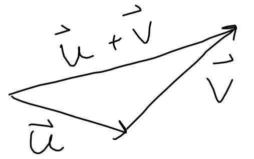
$$|t[x,y]| = |[tx, ty]| = \sqrt{(tx)^2+(ty)^2}$$

$$= \sqrt{t^2(x^2+y^2)} = \underbrace{\sqrt{t^2}}_{|t|}\,\underset{|[x,y]|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\vec{v}$ vektor $\quad |t\cdot\vec{v}| = |t|\cdot|\vec{v}|$

$$|\vec{v}| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$$

$|\vec{u}+\vec{v}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$ trekantulikheten



Vis gjerne at $\quad ||\vec{u}| - |\vec{v}|| \le |\vec{u}+\vec{v}|$

B (x_2, y_2)

A (x_1, y_1)

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$
$$[x_2, y_2] - [x_1, y_1]$$
$$= [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$$

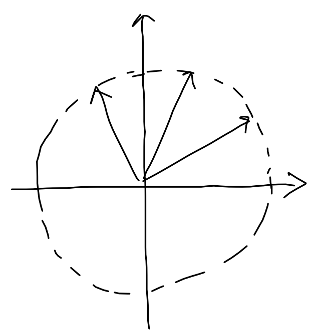
Avstanden fra A til B er lengden på $\vec{AB}$

som er $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

Vektorer med norm lik 1

$|\vec{v}| = 1$, kalles enhetsvektorer

Vi kan tenke på dem som de ulike retningene vektorene kan ha

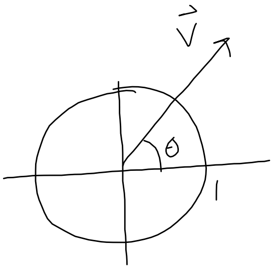


$\vec{v} \neq \vec{0}$ da er $|\vec{v}| \neq 0$

$$\Bigg| \underbrace{\left(\frac{1}{|\vec{v}|}\right) \cdot \vec{v}}_{\text{normalisert}} \Bigg| = \left|\frac{1}{|\vec{v}|}\right| \cdot |\vec{v}| = 1$$

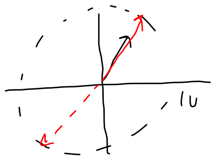
samme retning som $\vec{v}$ og lengde 1.

$\vec{v} \neq \vec{0}$ $\qquad \vec{v} = \underbrace{|\vec{v}|}_{\text{lengde}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right)}_{\text{retning}}$



$\vec{v} = |\vec{v}| \, [\cos\theta, \sin\theta]$
poolar-koordinater

Eksempel: Bestem t slik at $\vec{v} = [4t, 5t]$ har lengde 10.

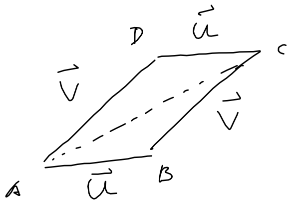


$|\vec{v}| = \sqrt{(4t)^2 + (5t)^2} = \sqrt{t^2(4^2+5^2)}$

$10 = |t| \sqrt{16+25} = |t|\sqrt{41}$

$|t| = \frac{10}{\sqrt{41}}$

$t = \underline{\pm\, 10/\sqrt{41}}$



$\vec{AC} = |\vec{u} + \vec{v}|$

Hva er $\vec{BD}$ uttrykt ved $\vec{u}$ og $\vec{v}$?

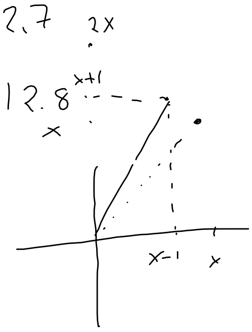
$\vec{BD} = |\vec{v} - \vec{u}|$

Hvilke vektor er lengst

$[9, 9]$ eller $[8, 10]$? (summen av x og y koordinate er den samme.

$|[9,9]| = \sqrt{2 \cdot 9^2} = \sqrt{2} \cdot 9 \sim 12{,}7$

$|[8,10]| = |2[4,5]| = 2\sqrt{41} \sim 12.8$



$|x-t,\ x+t| = \sqrt{(x-t)^2 + (x+t)^2}$
$= \sqrt{2x^2 + 2t^2}$

Denne vektoren er kortest når $t = 0$

Parallelle vektorer 12.8

To vektorer er parallelle hvis de har samme eller motsatt retning. $\vec{0}$ er parallell til alle vektorer.

$\vec{u} \parallel \vec{v}$ og $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ er det samme

som $\underbrace{\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}_{\text{retning til } \vec{u}} = \pm \underbrace{\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}_{\text{retning til } \vec{v}}$

$\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle hvis det finnes en skalar t slik at $t\vec{u} = \vec{v}$

eller $\vec{u} = \vec{0}$

Eksempel $[3,4]$ og $[15,20]$ er parallelle siden $5[3,4] = [15,20]$.

Er $\vec{u} = [26, 8]$ parallell til $\vec{v} = [-91, -28]$?

Undersøker om det finnes en skalar t slik at $t \cdot \vec{u} = \vec{v}$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$

$$t[26, 8] = [-91, -28]$$

$$26 \cdot t = -91 \quad \text{I}$$

$$8t = -28 \quad \text{II}$$

II gir at $t = \dfrac{-28}{8} = -\dfrac{4 \cdot 7}{4 \cdot 2} = -7/2 = -3.5$

Setter $t = -7/2$ inn i I og ser om det stemmer:

$$26 \cdot \frac{-7}{2} = -13 \cdot 7$$

$$= -(10+3)(10-3) \quad \text{stemmer!}$$

$$= -(10^2 - 3^2) = -91$$

$-3.5 \cdot \vec{u} = \vec{v}$. Vektorene er parallelle.

Er vektorene $[13, 19]$ og $[40.59]$ paralle?

Ikkje parallelle $\frac{40}{13} \neq \frac{59}{19}$

$t[x_1, y_1] = [x_2, y_2]$

$t\, x_1 = x_2$

$t\, y_1 = y_2$

$x_1, y_1 \neq 0$

$t = \frac{x_2}{x_1}$

$t = \frac{y_2}{y_1}$

Bestem s slik at $\vec{v} = [s, 2]$ og

$\vec{u} = [s^2, 1-s]$ blir parallelle.

$s \neq 0$ parallelle $\Leftrightarrow$ $\frac{s^2}{s} = \frac{1-s}{2}$

$2s = 1 - s$

$3s = 1$ $\quad s = \frac{1}{3}$

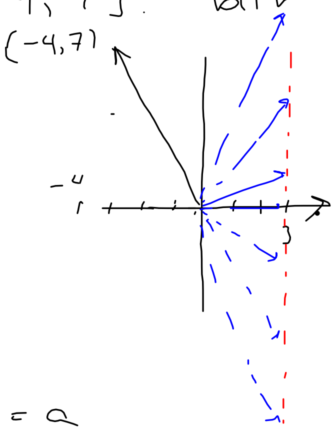
$\vec{v}(\frac{1}{3}) = [\frac{1}{3}, 2]$ $\quad \vec{u}(\frac{1}{3}) = [\frac{1}{9}, 1-\frac{1}{3}] = [\frac{1}{9}, \frac{2}{3}]$

$= \frac{1}{3}[\frac{1}{3}, 2] = \frac{1}{3}\vec{v}$

$s = 0$: $\vec{v}(0) = [0, 2]$ og $\vec{u}(0) = [0, 1] = \frac{1}{2}\vec{v}(0)$

$\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle for $s = 0$ og $s = 1/3$.

oppgave: Bestem a slik at $[3, a]$ og $[-4, 7]$ blir parallelle.



$$t[-4,7] = [3,a]$$

$$[-4t, 7t] = [3,a]$$

$$-4t = 3 \qquad t = -3/4$$

$$7t = a$$

Setter $t = -3/4$ inn i $7t = a$

$$a = -\frac{3}{4} \cdot 7 = -\frac{21}{4} = \underline{-5.25}$$

Når er $[t, t^3]$ og $[1, 4]$ parallelle?

$$s[t, t^3] = [1,4]$$

$$st = 1 \qquad s = 1/t$$

$$st^3 = 4 \quad \text{setter inn:} \quad \frac{1}{t} t^3 = 4$$

$$t^2 = 4$$

$$\underline{t = \pm 2}$$

I tillegg er $t = 0$ en løsning siden $[t, t^3]$ da er $\vec{0}$.

Løsningene er $\underline{0, \pm 2}$.