11.8

$$(\sin x)' = \cos x$$

Benytter $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ refleksjon om linjen

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $x = y$

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \frac{d \sin u}{du} \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

hvor $u = \frac{\pi}{2} - x$

$$= \cos(u)\,(-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

så $\underline{(\cos x)' = -\sin x}$

Her x oppgitt i radianer.

La y være vinkelen i grader

$$\sin\left(\frac{\pi}{180°} \cdot y\right)$$

$u = \frac{\pi}{180} \cdot y$

$$\frac{d}{dy} \sin\left(\frac{\pi}{180°} \cdot y\right) = (\sin u)' \left(\frac{\pi}{180°} \cdot y\right)'$$

$$= \cos u \cdot \frac{\pi}{180} = \underline{\frac{\pi}{180} \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot y\right)}$$

vi får en ekstra faktor hvis vi bruker grader i stede for radianer.

Eks $f(x) = 3x \sin(x+1)$

Deriver f : Benytter produktregelen

$$f' = (3x)' \sin(x+1) + (3x)(\sin(x+1))'$$

$$= 3\sin(x+1) + (3x)(\cos(x+1) \cdot \underbrace{(x+1)'}_{1})$$

$$= \underline{3\sin(x+1) + 3x\cos(x+1)}$$

oppg Deriver $g(x) = \frac{1}{\sin x} = (\sin x)^{-1}$

$$g' = \frac{d}{dU} U^{-1} \cdot U' = -1 \cdot U^{-2} \cdot (\sin x)'$$

$$= \frac{-1}{(\sin x)^2} \cdot \cos x$$

$$= \underline{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}$$

Hva er $(\tan x)'$?

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{(pytagoras)}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 + 1 = \tan^2 x + 1$$

$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1}$$

Eks $\frac{d}{dx}\cos^2 x = \frac{d}{dx}(\cos x)^2$ kjerneregelen:

$2(\cos x)\cdot(\cos x)' = -2\sin x \cdot \cos x = -\sin(2x)$

oppg $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\cos(2x)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\cos(2x))$ like!

$= \frac{1}{2}(-\sin(2x))\cdot\underbrace{(2x)'}_{2} = -\sin(2x)$

Hvis $f' = g'$ på et intervaller, så er $f - g$ konstant.

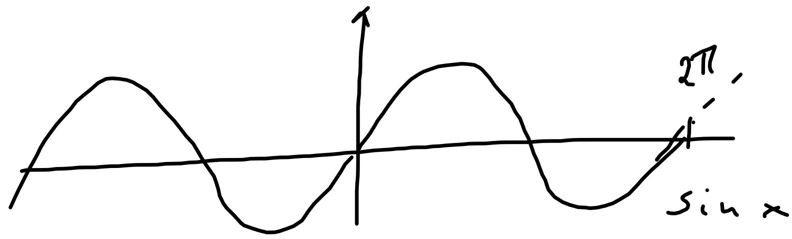
$\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos(2x) + \text{konst.}$ (satt $x=0$ gir konst $= 1/2$)

Vi ser dette også fra dobling av vinkel:

$\cos(2x) = \cos^2 x - \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} = 2\cos^2 x - 1$

$\frac{1}{2}\cos(2x) = \cos^2 x - \frac{1}{2}$

11.3-5 Sinusfunksjonen

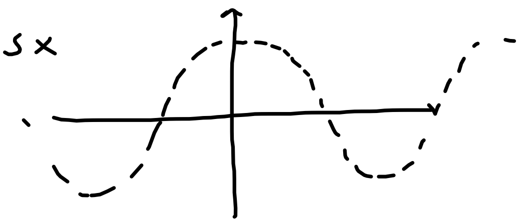


Vi kan forskyve grafen langs x og y-aksen.

Forskyve med d langs y-aksen: $\sin(x) + d$

Forskyve med c langs x-aksen: $\sin(x - c)$

(gyldig for alle funksjoner)



$\cos x$ er $\sin x$ forskyvd med $\frac{\pi}{2}$ til venstre ($-\frac{\pi}{2}$ til høyre)

Så $\cos x = \sin(x - (-\frac{\pi}{2})) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

(dette følger også fra addisjonsformelen for sin.)

Strekker langs y-aksen

med en faktor $a > 0$: $a \cdot \sin x$

$a < 0$ $\quad a \sin x = -|a| \sin x = |a| \sin(x + \pi)$

$|a| = -a$

forskyver med en halv periode

skalering med $|a|$

Strekke langs x-aksen

strekker med en faktor $s > 0$ $\quad \sin\left(\frac{x}{s}\right)$

komprimerer med en faktor $k > 0$ $\quad \sin(kx)$

($k = 1/s$)

$k < 0$ $\quad \sin(kx) = \sin(-|k| \cdot x)$

$k = -|k|$ $\quad = -\sin(|k| \cdot x) = \sin(|k| \cdot x + \pi)$

halv periode

sinusfunksjoner (og cosinusfunksjoner)

$$f(x) = a\sin(kx + c) + d$$

1. skalerer $(\sin x)$ med a i y-retning
   $|a|$ amplituden (utslagene til bølgene)
   $|k|$ komprimeringsfaktoren.
2. komprimerer med k i x-retning
   perioden p er bestemt $|k| \cdot p = 2\pi$
   $$\underline{p = \frac{2\pi}{|k|}}$$
3. Forskyver i y-retning med d.
   $y = d$ kalles likevektslinjen
4. Forskyver langs x-aksen $-c/k$
   $$\sin(kx + c) = \sin(kx - (-c)) = \sin\left(k\left(x - \frac{-c}{k}\right)\right)$$

Eks. $-3\sin\left(\frac{x-2}{4}\right) + 3$ Finn amplitude, likevektslinje, perioden

skriv gjerne på standardform.

Amplituden er $|-3| = 3$

perioden er $p = \frac{2\pi}{1/4} = 8\pi$

Likevektslinjen er $y = 3$

på standard form: $3\sin\left(\frac{x-2}{4} + \pi\right) + 3$

med $a, k > 0$ $\underline{3\sin\left(\frac{1}{4}\cdot x + \pi - \frac{1}{2}\right) + 3}$

Minner om $\cos(y) = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$

$g(x) = 2(\cos(\pi x - 3) - 5)$

skriv på standard form som sinuskurve:

$$2\sin\left(\pi x - 3 + \frac{\pi}{2}\right) - 10$$
$$= 2\sin\left(\pi \cdot x + \left(\frac{\pi}{2} - 3\right)\right) + (-10)$$