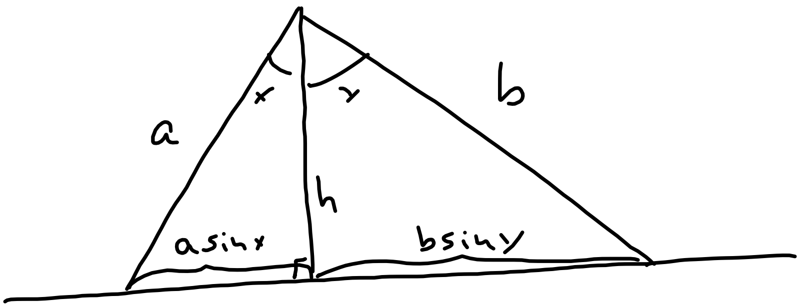
Addisjonsformelen for sin

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$

Eks $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin(x) + \cos(x)\right)$

Vi gir et bevis når $0 < x, y < \pi/2$



Arealet til den store Δ er $\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\sin(x+y)$

Høyden h er lik $a\cdot\cos x$ og $b\cos y$

summen av arealet til de to mindre Δ er

velger $h = b\cos y$ $\qquad$ $h = a\cos x$

lik $\frac{a\sin x\cdot h}{2} + \frac{b\sin y\cdot h}{2}$

Dette er lik totalt areal $\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin(x+y)$

$$\frac{a\sin x\cdot(b\cos y)}{2} + \frac{b\sin y\,(a\cos x)}{2} = \frac{1}{2}a\cdot b\sin(x+y)$$

Ganger med 2 og deler med $a\cdot b$:

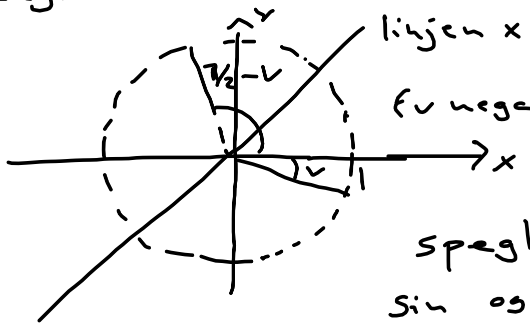
$$\underline{\sin x\cos y + \sin y\cos x = \sin(x+y)}$$

Resultatet er gyldig for alle x og y. (mattenøkkelen.no)

Relasjon mellom sin og cos

$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos(y)$

Benytter dette til å finne en addisjonsformel for cos.



spegler om linjen $x = y$
sin og cos bytter roller.

$\cos(x+y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + (-y)\right)$

ved addisjonsformelen for sinus:

$$\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}_{\cos(x)} \underbrace{\cos(-y)}_{\cos(y)} + \underbrace{\sin(-y)}_{-\sin(y)} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}_{\sin(x)}$$

Så $\underline{\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y}$

Addisjonsformel for tan   oppg 11.14 i boken

Differanse av vinkler

$\sin(x-y) = \sin(x + (-y))$

$= \sin x \cdot \underbrace{\cos(-y)}_{\cos y} + \underbrace{\sin(-y)}_{-\sin y} \cos x$

$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$

Addisjonsformlene lar oss lett finne eksakte verdier av sin av $15° = \frac{\pi}{12}$ og $75° = \frac{5\pi}{12}$:

$\sin(15°) = \sin(45° - 30°)$

$= \sin(45°) \cos(-30°) + \sin(-30°) \cos 45°$

$\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \sim 0.26$

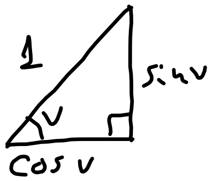
oppg. 11.11 i boka

$\sin(75°) = \sin(45° + 30°) \ldots$

Dobling av vinkel

Addisjonsformlene hvor dei to vinklene er like

$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$$



For hvilke vinkel v er arealet størst?

Arealet $A = \frac{1}{2} \underbrace{\sin v \cdot \cos v}_{\frac{1}{2}\sin(v+v)}$

$$A = \frac{1}{4}\sin(2v)$$

A er størst når $\sin(2v) = 1$

Dette gir $2v = \frac{\pi}{2}$ (opp til et helt omløp)

For $0^\circ < v < 90^\circ$ er arealet derfor størst

når $v = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ (arealet er da lik $\frac{1}{4}$)

Addisjonsformelen for cos.

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Vi kombinerer dette med pytagoras

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\left(\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad \text{og} \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x\right)$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

Så $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

Tilsvarede $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

11.8

$$\boxed{\begin{aligned}(\sin x)' &= \cos x\\ (\cos x)' &= -\sin x\end{aligned}}$$

Def. av den deriverte:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

bruker add. formel for sin

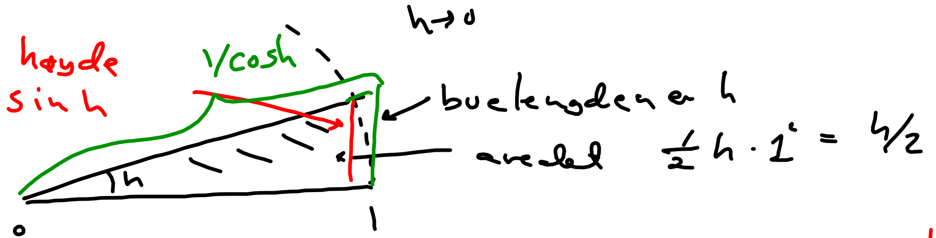
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \sin h \cdot \cos x - \sin x}{h}$$

$$= \sin x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{0} + \cos x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{1}$$

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1$$

$$= \cos x$$

Vi viser at $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ her brukes radianer!



høyde < buelengde $\quad \sin h < h \quad h>0$

$$\frac{\sin h}{h} < 1$$

Areal sirkel-segment < areal største trekant

$$\frac{h}{2} < \frac{1}{2} \cdot \underset{\text{bredde}}{1} \cdot \underset{\text{høyde}}{\frac{1}{\cos h} \cdot \sin h}$$

dette gir, $h < \frac{\sin h}{\cos h}$

Derfor er $\cos h < \frac{\sin h}{h} < 1$

siden $\lim_{h\to 0} \cos h = 1$ så må

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} \cdot \frac{1+\cos h}{1+\cos h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)} \overset{Pyt}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \sin(h) \cdot \frac{1}{1+\cos h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \sin h \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+\cos h}$$

$$1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \underline{0}$$

Eks $f(x) = 3\sin(2x)$ Deriver f

$u = 2x$

$$f' = 3(\sin(2x))'$$

$$= 3 \cdot \frac{d\sin(u)}{du}(2x)'$$

$$= 3(\cos(2x)) \cdot 2$$

$$= \underline{6\cos(2x)}$$