| | |
|---|---|
| Prøve i | FO929A - Matematikk |
| Dato: | 1. desember 2014 |
| Målform: | Bokmål |
| Antall oppgaver: | 8 (20 deloppgaver) |
| Antall sider: | 3 |
| Vedlegg: | Formelsamling |
| Hjelpemiddel: | Kalkulator |

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver teller like mye.

# Løsningsforslag

**Oppgave 1**

I denne oppgaven skal dere løse likninger. Alle svarene skal gis med **eksakte** verdier.

a) Løs den lineære likningen (eksakt!)

$$11{,}1x - 1{,}3 = \frac{2}{7}.$$

LF: Vi gjør om desimaltallene til brøker:

$$\frac{111}{10}x = \frac{2}{7} + \frac{13}{10} = \frac{20 + 13 \cdot 7}{70} = \frac{111}{70}$$

Dette gir at

$$x = \frac{111}{70} \cdot \left(\frac{111}{10}\right)^{-1} = \frac{111}{70} \cdot \frac{10}{111} = \underline{\frac{1}{7}}$$

b) Løs den kvadratiske likningen

$$3x^2 + 7x = -4.$$

LF: Vi skriver først likningen på standard form

$$3x^2 + 7x + 4 = 0.$$

Andregradsformelen gir at løsningene er

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{6} = \frac{-7 \pm 1}{6}$$

Løsningene er derfor $\underline{x = -1 \text{ og } x = -4/3}$ .

c) Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ y + 2x &= 4\,. \end{aligned}$$

LF: Vi har at $x = 3 - 2y$, fra den første likningen. Vi setter dette inn i den andre likningen og får

$$y + 2(3 - 2y) = 6 - 3y = 4$$

Dette gir at $3y = 2$, så $y = 2/3$ og $x = 3 - 2y = (9 - 4)/3 = 5/3$. Løsningen er $\underline{x = 5/3 \text{ og } y = 2/3}$.

d) Finn alle løsningene til likningen

$$4\cos^2 v = 3$$

slik at $0 < v < 2\pi$ (radian).

LF: Likningen er ekvivalent til $|\cos(v)| = \sqrt{3}/2$, som igjen er ekvivalent til $\cos(v) = \sqrt{3}/2$ eller $\cos(v) = -\sqrt{3}/2$. Løsningene er

$$\underline{v = \pi/6, \quad 5\pi/6, \quad 7\pi/6, \quad 11\pi/6}$$

e) Løs likningen $\sqrt{3 + 2x} + x = 0$.

LF: Likningen er ekvivalent til likningen $\sqrt{3 + 2x} = -x$. Vi kvadrerer på begge sider av likhetstegnet. Alle løsninger til den opprinnelige likningen er da også løsninger til den nye likningen (men ikke nødvendigvis motsatt)

$$3 + 2x = x^2.$$

Siden $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ så er røttene $x = -1$ og $x = 3$. Den første er en løsning til den opprinnelige likningen, mens den andre er en falsk løsning. Løsningen er $\underline{x = -1}$.

## Oppgave 2

I denne oppgaven skal dere løse ulikheter.

a) Finn alle løsningene til ulikheten

$$2\sin(v)\cos(v) \geq \sin(v)$$

slik at $-180° \leq v \leq 180°$.

Ulikheten er ekvivalent til

$$2\sin(v)(\cos(v) - 1/2) \geq 0.$$

I intervallet er $\sin(v) \geq 0$ for $v \in \{-180°\} \cup [0, 180°]$ og $\cos(v) - 1/2 \geq 0$ for $v \in [-60°, 60°]$. Et fortegnsskjema gir at

$$2\sin(v)(\cos(v) - 1/2) \geq 0$$

for $\underline{v \in [-180°, -60°] \cup [0, 60°] \cup \{180°\}}$.

b) Løs ulikheten

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x - 6} \leq 0.$$

LF: Vi faktoriserer både teller og nevner og får

$$\frac{(x-2)(x+3)}{(x-6)(x+1)} \leq 0.$$

Et fortegnskjema for disse fire faktorene gir løsningsmengden

$$\underline{[-3, -1\rangle \cup [2, 6\rangle}$$

## Oppgave 3

Vi har tre punkter i rommet: $A(2, 1, 1)$, $B(1, 2, -4)$ og $D(-2, 1{,}6)$.

a) Finn vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$. Anta at $C$ er slik at $ABCD$ er et parallellogram. Bestem koordinaten til $C$.

LF: Vektoren $\overrightarrow{AB}$ er lik

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [1, 2, -4] - [2, 1, 1] = \underline{[-1, 1, -5]}.$$

Tilsvarende er $\overrightarrow{AD}$ er lik

$$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [-2{,}1, 6] - [2, 1, 1] = \underline{[-4, 0, 5]}.$$

Siden $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, så er

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = [1{,}2,-4] + [-4,0,5] = [-3,2,1]$$

Koordinatene til $C$ er $\underline{(-3,2{,}1)}$.

b) Bestem vinkelen mellom vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$. Bestem arealet til parallellogrammet $ABCD$.

LF: La $v$ være vinkelen. Da har vi at

$$\cos(v) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{-21}{\sqrt{27}\sqrt{41}} \approx -0{,}63117$$

Dette gir at vinkelen mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$ er $\underline{129{,}13^\circ}$.

Arealet til parallellogrammet er lik absoluttverdien til kryssproduktet

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = [5,25,4].$$

Det er lik

$$\sqrt{25+625+16} = \underline{\sqrt{666} \approx 25{,}807}.$$

c) Et punkt $T$ har koordinater (3,1,2). Bestem volumet til pyramiden med grunnflate $ABCD$ og topp i $T$.

LF: Volumet til pyramiden er en tredel av absoluttverdien til trippelproduktet av $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{AT}$.

Vektoren $\overrightarrow{AT}$ er lik

$$\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA} = [3{,}1{,}2] - [2,1,1] = \underline{[1,0,1]}.$$

Trippelproduktet er lik

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -5 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 9.$$

Volumet til pyramiden er derfor lik $\underline{3}$.

## Oppgave 4

a) Et plan i rommet er parametrisert som følger

$$\begin{aligned} x &= 2s \\ y &= 4-s \\ z &= 1+4s+t\,. \end{aligned}$$

Finn en likning som beskriver dette planet (løsningsmengden er planet).

LF: To ikke-parallelle vektorer parallelle til planet er $[2,-1,4]$ og [0,0,1]. En normalvektorer til planet er gitt ved kryssproduktet av disse to:

$$[2,-1,4] \times [0{,}0{,}1] = [1{,}2{,}0].$$

(Vi finner også lett en normalvektor bare ved inspeksjon.) Siden punktet $(0,4,1)$ er et punkt i planet er planet gitt ved likningen

$$[1{,}2{,}0] \cdot [x{,}y{,}z] = [1{,}2{,}0] \cdot [0,4{,}1]$$

$$\underline{x + 2y = 8}$$

b) Parametriser linjen som er snittet mellom planet i forrige deloppgave og planet gitt ved $x - y + 2z = 4$. (Linjen består av alle punktene som ligger i begge planene.)

LF: Linjen er parallell til kryssproduktet av de to normalvektorene:

$$[1{,}2{,}0] \times [1,-1,2] = [4,-2,-3]$$

Vi finner et punkt som ligger i begge planene. For eksempel (4,2,1). En parametrisering er derfor gitt ved

$$\begin{cases} x &= 4 + 4t \\ y &= 2 - 2t \\ z &= 1 - 3t \end{cases}$$

## Oppgave 5

a) Skriv opp de fem første leddene i den uendelige geometriske rekken som starter med 1 og som har kvotient lik $-1/2$. Bestem summen av den uendelige rekken (hvis den eksisterer).

LF:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Denne geometriske rekken konvergerer siden kvotienten har absoluttverdie mindre enn 1. Summen er

$$\frac{1}{1-(-1/2)} = \underline{\frac{2}{3}}.$$

b) Finn summen av alle naturlige tall mindre enn eller lik 1000 som er delelig med 3.

LF: Det største tallet mindre enn eller lik 1000 som er delelig med 3 er 999. Summen er derfor lik

$$\sum_{i=1}^{333} 3i = 3 \cdot \frac{333 \cdot 334}{2} = \underline{166\,833}.$$

c) Finn summen av alle naturlige tall mindre enn eller lik 1000 som er delelig med 3 eller med 7.

Dette er summen av alle tall som er delelig med 3 samt summen av alle tall som er delelig med 7 trekt fra summen av alle tall som er delelig med $3 \cdot 7$ (de telles dobbelt og må trekkes ifra.

Vi har at $2 \cdot 490 = 2 \cdot 10 \cdot 7^2 = 980$. Derfor er det største tallet delelig med 7 og mindre enn 1000 lik $994 = 142 \cdot 7$. Summen av de naturlige tall mindre eller lik 1000 som er delelig med 7 er

$$\sum_{i=1}^{142} 7i = \frac{142 \cdot 143}{2} \cdot 7 = 7 \cdot 71 \cdot 143 = 497 \cdot 143 =$$

$$(500 - 3)(140 + 3) = 70\,000 + 3(500 - 140) - 9 = 71\,071.$$

Det største tallet mindre enn eller lik 1000 som er delelig med 21 er $987 = 21 \cdot 47$. Summen av de naturlige tall mindre eller lik 1000 som er delelig med 21 er

$$\sum_{i=1}^{47} 21i = \frac{47 \cdot 48}{2} \cdot 21 = 47 \cdot 24 \cdot 2147 \cdot (504) = (50-3)(500+4) = 23\,688.$$

Summen av alle naturlige tall mindre enn eller lik 1000 som er delelig med 3 eller med 7 er derfor

$$166\,833 + 71\,071 - 23\,688 = \underline{214\,216}$$

## Oppgave 6

a) Bestem alle trekanter $ABC$ slik at $AB$ har lengde 10, vinkel $A$ er lik $30°$ og $BC$ har lengde 6. Finn lengdene til alle sidene i trekantene.

LF: La $b$ være lengden til side $AC$. Fra cosinussetningen har vi

$$6^2 = b^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot b \cdot \cos(30) = b^2 + 100 - 10\sqrt{3}b$$

Løsningen til denne annengradslinkningen

$$b^2 - 10\sqrt{3}b + 64 = 0$$

er

$$b = \frac{10\sqrt{3} \pm \sqrt{300 - 4 \cdot 64}}{2} = \frac{10\sqrt{3} \pm \sqrt{44}}{2} = 5\sqrt{3} \pm \sqrt{11}$$

Lengden på siden $AC$ er $\underline{5\sqrt{3} + \sqrt{11}}$ for den ene mulige trekanten og $\underline{5\sqrt{3} - \sqrt{11}}$ for den andre mulige trekanten.

b) Bestem antall mulige trekanter $ABC$ slik at vinkel $A$ er lik 30°, lengden til $AB$ er lik 10 og lengden til $BC$ er lik $a$. (Svaret avhenger av verdien til $a > 0$. Beskriv antallet som en funksjon av $a$.)

LF: Det er ingen mulige trekanter om $a < 5$, det er akkurat én mulig trekant hvis $a = 5$ eller hvis $a \geq 10$ og det er to mulige trekanter om $5 < a < 10$.

**Oppgave 7**

a) Grafen til likningen $x^2 + y^2 = 4x - 8y$ er en sirkel. Bestem koordinatene til senteret til sirkelen samt radius til sirkelen.

LF: Vi fullfører kvadratet:

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = (-2)^2 + 4^2 = 20$$

$\underline{\text{Senteret til sirkelen er derfor } (2, -4) \text{ og radien er lik } \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.}$

b) Sirkelen i $a$) går gjennom origo. Regn ut arealet til den delen av (området inni sirkelen) som ligger i første kvadrant (det er den delen av de reelle planet hvor både $x$ og $y$ koordinatene er større enn eller lik null).

Arealet er lik differansen av arealet av sirkelsegmentet begrenset av første kvadrant og trekanten som ligger under $x$-aksen. Differansen er lik

$$\underline{(2\sqrt{5})^2 \cdot \arctan(2/4) - 2 \cdot 4 \approx 1.2729}$$

**Oppgave 8**

Finn radien $R$ til den minste kulen som inneholder en kjegle med høyde $h$ og en sirkulær grunnflate med radius $r$.

LF: Hvis $h < r$ da kan vi plassere kjeglen slik at grunnflaten ligger på en storsirkel. Altså er $r = R$. Hvis $h > r$ derimot, da går ikke dette uten at kjeglen stikker ut av kulen. Vi må derfor velge en støre sfære. Anta at grunnflaten er flyttet ned $y$ fra senteret i sfæren. Da er $h = R + y$ og $r^2 + y^2 = R^2$. Løser vi for $y$ og setter dette inn i den andre likningen får vi

$$r^2 + (h - R)^2 - R^2 = r^2 + h^2 - 2Rh = 0$$

Dette er en lineær likning i $R$ og løsningen er

$$\underline{R = \frac{r^2 + h^2}{2h}}$$

(Når $h$ blir veldig stor i forhold til $r$ ser vi at $R$ blir tilnærmet lik $H/2$, som forventet. Når $r = h$ får vi $R = r$, også som forventet.)

Vi kan oppsummere dette slik:

$$R = \begin{cases} r & h < r \\ \dfrac{r^2 + h^2}{2h} & h \geq r \end{cases}$$