5.11.2014

17 Følger og Rekker

En (endelig) tallfølge er en ordnet mengde med tall

n-te ledd

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ endelig

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ vendelig

eller $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Andre skrivemåter: $\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Eksempler: De naturlige tallene

$1, 2, 3, \ldots$

n-te ledd $a_n = n$.

–

(Heltallene) $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$

–

Endelig tallfølge $1, 3, 5, 7$ (4 ledd)

$3, 7, 5, 1$

Dette er to forskjellige tallfølger (forskjellig rekkefølge)

– $a_n = (-1)^n$ (starter med $n=1$)

$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

Følgen av primtall

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$$

Vi har ingen formel for ledd n.

(uendelig følge siden det er uendelig mange primtall)

En tallfølge er gitt rekursivt hvis ledd nr. n kan bestemmes fra de foregående leddene.

$$X_{(n+1)} = X_n + 2$$

$$x_1 = 1$$

$$X_2 = X_1 + 2 = 1+2 = 3$$

$$X_3 = X_2 + 2 = 3+2 = 5$$

$$X_4 = X_3 + 2 = 5+2 = 7$$

$$\vdots$$

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

(positive oddetallene ordnet etter størrelse)

En formel for X_n er $\underline{X_n = 2 \cdot n - 1}$

for eksempel $X_{1000} = 2 \cdot 1000 - 1 = 1999$

Tallfølger $\{a_n\}$ trenger ikke starte med $n = 1$

$$a_4, a_5, \ldots, a_n$$

$(n-3)$ ledd

a_4: første ledd, a_n: $(n-3)$-ledd

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

a_0: første ledd, a_1: andre ledd, a_n: $(n+1)$ ledd

En tallfølge $x_0, x_1, \ldots$ er gitt rekursivt ved $x_0 = 1$

$$x_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}$$

$$x_1 = x_0 = 1$$

$$x_2 = x_0 + x_1 = 1 + 1 = 2$$

$$x_3 = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$x_4 = 1 + 1 + 2 + 4 = 8$$

$$x_5 = \underbrace{(x_0 + x_1 + x_2 + x_3)}_{x_4} + x_4 = 2x_4 = 16$$

$$x_n = \underbrace{(x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-2})}_{x_{n-1}} + x_{n-1}$$

$$= 2x_{n-1} \qquad n \geq 2.$$

så $x_n = 2^k x_{n-k}$ $(k = n-2)$

$$= 2^{n-2} \cdot x_2.$$

Formel for ledd n

$x_0 = 1$

$x_n = 2^{n-1}$ $\quad n \geq 1$

Fibonacci tallfølgen

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad n \geq 0$$

$F_0 = 0$ $\quad F_1 = 1$ $\quad (F_2 = 1).$

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Formel for $F_n = \frac{1}{\varphi + \frac{1}{\varphi}} \left(\varphi^n - (-1)^n \left(\frac{1}{\varphi}\right)^n \right)$

$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ gylne snitt.

≈ 1.618

$x^2 = x + 1$ har røtter $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$

$$-\frac{1}{\varphi} = -0.618 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi - \frac{1}{\varphi} = 1$$

$$\varphi + \frac{1}{\varphi} = \sqrt{5}$$

La

$$x_n = \varphi^n \qquad y_n = \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n.$$

Da er $\quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$

$$\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n \quad (\text{gang } \varphi^2 = \varphi + 1 \text{ med } \varphi^n)$$

tilsvarende $\quad y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$

$z_n = a x_n + b y_n$ oppfyller den rekursive formelen $z_{n+2} = z_{n+1} + z_n$

$$\begin{aligned} z_{n+2} = a x_{n+2} + b y_{n+2} &= a(x_{n+1} + x_n) + b(y_{n+1} + y_n) \\ &= a x_{n+1} + b y_{n+1} + a x_n + b y_n \\ &= z_{n+1} + z_n. \end{aligned}$$

Bestemmer a og b slik at $\quad z_0 = 0 \quad z_1 = 1$

$$z_0 = a\varphi^0 + b\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^0 = a + b = 0 \qquad \text{så } \underline{b = -a}$$

$$z_1 = a \cdot \varphi + b \cdot \left(\frac{-1}{\varphi}\right) = a\left[\varphi - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)\right] = a\left[\varphi + \frac{1}{\varphi}\right] = 1$$

så $a = \frac{1}{\varphi + 1/\varphi}$.

$z_0 = F_0, \quad z_1 = F_1 \quad$ og $\quad \begin{aligned} z_{n+2} &= z_{n+1} + z_n \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$

$$\left(z_{n+2} - F_{n+2} = (z_{n+1} - F_{n+1}) + (z_n - F_n) \right)$$

(Startverdiene er begge 0, så $z_n = F_n$ for alle n)

Da må $\quad z_n = F_n$

$$\underline{F_n = \frac{1}{\varphi + \frac{1}{\varphi}}\left(\varphi^n - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n\right)}$$

Grenser av tallfølger

En tallfølge $a_1, \dots, a_n, \dots$ <u>konvergerer</u> til et tall a hvis a_n nærmer seg a når n blir stor.

Eks $\quad a_n = \frac{1}{n}$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ konvergerer til 0.

$a_n = (-1)^n \qquad -1, 1, -1, 1, \dots$

konvergerer ikkje
(divergerer)

$a_n = \frac{n}{n+1} \qquad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ konvergerer til 1

$\left(= \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \right)$

$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$ konvergerer mot 0

$a_n = 2^n \qquad 2, 4, 8, 16, \dots$ konvergerer ikkje

$a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \qquad 1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \dots$

konvergerer til det gylne snitt.

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

(ganger med den konjugerte, konjugatsetning
$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$)

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$\{a_n\}$ konvergerer til 0.

$$b_n = \sqrt{n^2+n} - n$$

Konvergerer $\{b_n\}$? til hva?

$n = 100$ $\quad \sqrt{10100} - 100 \sim 0.49875$

$n = 10000$ $\quad \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2}$ $\quad 0.499998\ldots$

$$a_n = (\sqrt{n^2+n} - n)\frac{(\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n} + n}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}\right) + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}$$

$\{b_n\}$ konvergerer til $\underline{\frac{1}{2}}$

Hvis a_n konvergerer til a når n går mot vendelig skriver vi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \left(\text{limit} \begin{array}{c}\text{eng.}\\ \text{grense}\end{array}\right)$$

Presis definisjon:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

For alle M (pos. heltall) så finnes det en N slik at

$$|a - a_n| < \frac{1}{M}$$

når $n > N$.