

Drill første ordens separable differensialligninger

Forkurset, våren 2007

Opgavene er supplement til lærebokens kapittel 12.6.

Introduksjon

En differensialligning er en ligning som inneholder en ukjent funksjon $y = y(x)$, variabelen x og de deriverte y' , y'' , ... av funksjonen y . I motsetning til de ligningene vi har sett på til nå er løsningen av en differensialligning *ikke* ett eller flere tall, men en funksjon.

Vi skal se på såkalte første ordens separable differensialligninger. Det er ligninger som knytter sammen y , y' og x og at de kan løses med en teknikk som heter *separasjon av variablene*. I denne sammenhengen er det fordelaktig å bruke Leibnitz' skrivemåte $y' = \frac{dy}{dx}$. Oppgaver finnes i del 1.

Når vi løser første ordens differensialligninger dukker det opp en ubestemt konstant. For å finne tallverdien av denne trenger vi informasjon om verdien av den ukjente funksjonen i et punkt $x = x_0$. Vi må med andre ord kjenne tallverdien $y(x_0) = y_0$. En differensialligning sammen med informasjonen $y(x_0) = y_0$ kalles et startverdiproblem. Oppgaver finnes i del 2.

1 Drill i løsning av separable differensialligninger

Eksempel

Jeg viser to eksempler; ett som bare inneholder y og y' og ett som i også inneholder variabelen x .

a) Vi ser på ligningen

$$y' = \lambda y, \quad \text{for en konstant } \lambda$$

som blant annet styrer radioaktiv nedbrytning og celledeling. Vi innfører $y' = \frac{dy}{dx}$. Deretter separerer vi variablene x og y ved å gange hele ligningen med $\frac{dx}{y}$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \lambda dx.$$

Denne ligningen er separert fordi alt med y er på venstre side og alt med x er på høyre side. Vi tar nå integralet på begge sider av ligningen. Legg merke til at vi slår de to integrasjonskonstantene sammen til en konstant C .

$$\int \frac{dy}{y} = \int \lambda dx = \lambda \int dx \quad \Rightarrow \quad \ln |y| = \lambda x + C.$$

Til slutt skal vi løse ligningen med hensyn på y . I dette tilfellet gjør vi det ved å bruke eksponentialfunksjonen på begge sider av ligningen fordi $e^{\ln |y|} = y$. Det gir

$$y = e^{\lambda x + C} = e^{\lambda x} \cdot e^C = K e^{\lambda x}, \quad \text{der konstanten } K = e^C.$$

Den generelle løsningen av differensialligningen

$$y' = \lambda y \quad \text{er} \quad \underline{\underline{y = K e^{\lambda x}}}.$$

Se eksemplet til del 2 for hvordan vi kan bestemme tallverdien til konstanten K .

b) Se på ligningen

$$y' = -2xy^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -2xy^2.$$

Vi separerer ved å gange med $\frac{dx}{y^2}$ og tar integralet på begge sider.

$$\frac{dy}{y^2} = -2x dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int -2x dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = -x^2 + C.$$

Etter integrasjonen løser vi ligningen med hensyn på y

$$-\frac{1}{y} = -x^2 + C \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = x^2 - C \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = \frac{1}{x^2 - C}}}.$$

Oppgaver

- a) $y' = -y^2 \quad \triangleright y(x) = \frac{1}{x-C}$
b) $y' = x\sqrt{y} \quad \triangleright y(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + C\right)^2$
c) $y' = 2xy \quad \triangleright y(x) = Ce^{x^2}$
d) $2yy' = \frac{1}{x^2+1} \quad \triangleright y(x) = \sqrt{\tan^{-1} x + C}$
e) $(x^2 + 1)y' = 2xy \quad \triangleright y(x) = C(x^2 + 1)$
f) $y' = -y \tan x \quad \triangleright y = C \cos x$

2 Drill i løsning av startverdi problemer

Et startverdi problem er en differensialligning sammen med en opplysning om hvilken tallverdi løsningen $y = y(x)$ har i et gitt punkt $x = x_0$. Denne opplysningen brukes til å finne en tallverdi for konstanten i den generelle løsningen. En slik løsning kalles en spesielle løsning eller en partikulær løsning.

Eksempel

- a) Se på differensialligningen

$$y' = \lambda y \quad \text{med} \quad y(0) = 5.$$

Vi fant den generelle løsningen $y = Ke^{\lambda x}$. Det gir

$$y(0) = Ke^{\lambda \cdot 0} = K \quad (\text{siden } e^0 = 1).$$

Altså er $K = 5$ og den partikulære løsningen $y = 5e^{\lambda x}$.

- b) Se på differensialligningen

$$y' = -2xy^2 \quad \text{med} \quad y(0) = 1.$$

Vi fant den generelle løsningen $y = \frac{1}{x^2 - C}$. Det gir

$$y(0) = \frac{1}{0^2 - C} = -\frac{1}{C} = 1.$$

Altså er $C = -1$ og den partikulære løsningen $y = \frac{1}{x^2+1}$.

Oppgaver

Bruk tilleggsopplysningene og finn konstanten i oppgavene fra del 1.

- a) $y' = -y^2$ og $y(0) = -\frac{1}{2} \quad \triangleright C = 2$ som gir $y(x) = \frac{1}{x-2}$
b) $y' = x\sqrt{y}$ og $y(2) = 0 \quad \triangleright C = -1$ som gir $y(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right)^2$
c) $y' = 2xy$ og $y(0) = -3 \quad \triangleright C = -3$ som gir $y(x) = -3e^{x^2}$
d) $2yy' = \frac{1}{x^2+1}$ og $y(0) = 0 \quad \triangleright C = 0$ som gir $y(x) = \sqrt{\tan^{-1} x}$
e) $(x^2 + 1)y' = 2xy$ og $y(0) = 1 \quad \triangleright C = 1$ som gir $y(x) = x^2 + 1$
f) $y' = -y \tan x$ og $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \quad \triangleright C = 8$ som gir $y = 8 \cos x$