| | |
|---|---|
| Prøve i | FO929A - Matematikk |
| Dato: | 15. november 2012 |
| Hjelpemiddel: | Kalkulator |

**Oppgave 1**

a) Finn alle løsningene til likningen

$$10x - 100 = -90x^{-1}.$$

b) Finn alle løsninger $v$ til likningen

$$2\cos^2 v = \sin 2v$$

slik at $0 \leq v \leq 4\pi$.

a) Vi deler likningen med 10 og samler alle ledd på venstre side. Likningen er da ekvivalent til

$$x - 10 + 9/x = 0.$$

Dette gir ikke mening når $x = 0$. For $x \neq 0$ er likningen ekvivalent til

$$x^2 - 10x + 9 = (x-9)(x-1) = 0.$$

Løsningene til likningen er $\underline{x = 1 \text{ og } x = 9}$.

b) Vi benytter at $\sin 2v = 2\sin v \cos v$ for alle $v$. Vi samler alle ledd på venstre side og tar ut $2\cos v$ som en felles faktor. Likningen er ekvivalent til

$$2\cos v(\cos v - \sin v) = 0.$$

Løsningne er derfor løsningene til likningene $\cos v = 0$ og $\cos v = \sin v$. I den oppgitte intervallen er løsningene

$$\underline{\pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, 7\pi/2 \quad \text{og} \quad \pi/4, 5\pi/4, 9\pi/4, 13\pi/4}.$$

**Oppgave 2**

Løs ulikhetene

a) $3(x-2) > -x(2x+1)$

b) $\sin(x) \leq 1/2$ hvor $x$ (radianer) er avgrenset til intervallen $[0, 2\pi]$

c)

$$\frac{1}{x^2-4} \geq 1.$$

a) Ved å flytte venstre side over til høyre er ulikheten ekvivalent til

$$2(x^2+2x-3) > 0.$$

Uttrykket faktoriseres som $2(x+3)(x-1)$. Dette er ein parabel med positiv ledende koeffisient og med nullpunkt $-3$ og 1. Løsningsmengden til ulikheten er $\underline{(-\infty, -3) \cup (1, \infty)}$.

b) Løsningsmengden er $\underline{[0, \pi/6] \cup [5\pi/6, 2\pi]}$. Dette ser vi fra enhetssirkelen kombinert med at $\sin(\pi/6) = 1/2 = \sin(\pi - \pi/6)$.

c) Vi observerer først at $x$ må være ulik $-2$ og 2 for at uttrykkene skal være definert. Vi ungår åmultiplisere med $x^2-4$ siden den kan være både negativ og positiv. Vi samler alle ledd på venstre side og finner felles never

$$0 \geq -\frac{1}{x^2-4} + 1 = \frac{x^2-5}{x^2-4} = \frac{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{(x-2)(x+2)}.$$

Vi ser nå (for eksempel ved å bruke et fortegnskjema) at løsningen er

$$\underline{[-\sqrt{5}, -2) \cup (2, \sqrt{5}]}.$$

**Oppgave 3**

a) Forklar hvorfor den uendelige geometriske rekken

$$6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \cdots$$

konvergerer. (Hva vil det si at rekken konvergerer.)

b) Hva er summen til rekken?

c) En følge er gitt rekursivt ved $a_1 = 1$ og $a_n = 2a_{n-1} + 1$. Skriv opp de 8 første leddene. Hva er det $n$-te leddet uttrykt ved hjelp av $n$? Grunngi svaret.

a) At en rekke konvergerer vil si at følgen av delfølger konvergerer. At en følge $a_n$ konvergerer til et tall $L$ vil si at $a_n$ bli vilkårlig nær $L$ når $n$ vokser mot uendelig. I dette tilfellet har vi en geometrisk følge. Vi vet at uendelige geometriske følger konvergerer hvis og bare hvis kvotienten har absoluttverdi ekte mindre enn 1. Dette vet vi fordi vi kan finne eksakte delsummer for geometriske rekker som gir resultatet.

b) I dette tilfellet er $n$te delsumm av rekken

$$6(1 - (1/2)^n)/(1 - 1/2) = 12(1 - (1/2)^n).$$

Summen til den uendelige rekken er derfor $\underline{12}$.

c) Dei 8 første leddene er

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255.$$

Mange vil nok kjenne igjen disse tallene som $2^n - 1$ for $n = 1, 2, \ldots, 8$.

Vi skal nå vise at dette holder for alle $n$. Siden $a_n = 2a_{n-1} + 1$ så er $(a_n + 1) = 2(a_{n-1} + 1)$. Siden $a_1 + 1 = 2$ og $a_i + 1$ er en geometrisk følge med kvotient 2 så er $a_n + 1 = 2^n$. Derfor er $\underline{a_n = 2^n - 1}$.

**Oppgave 4**

Ingrid og Halvard skal lage en trapp i hagen. Trappeformelen sier at lengden på inntrinnene og opptrinnene bør være slik at ett inntrinn pluss to opptrinn til sammen er 63 cm. (Trapper som følger trappeformelen er gjerne behagelige å gå i, fordi trinnene er tilpasset en typisk skrittlengde for en voksen person.)

a) Ingrid vil gjerne at opptrinnet skal være 15 cm. Hvis trappeformelen følges, hva blir da inntrinnet og stigningen til trappen?

b) De går ut i hagen og måler stigningen til bakken hvor trappen skal stå. Trappen skal ha en stigning på 20 grader. Trappen i a) er derfor for bratt. Hvis opptrinnet skal være 15 cm og stigningen 20 grader. Hva blir da inntrinnet? Hva blir summen av ett inntrinn og to opptrinn?

c) De synest avviket fra trappeformelen er for stort og bestemmer seg like godt for å finne inntrinnet, $i$ og opptrinnet, $o$, slik at stigningen til trappen blir 20 grader og trappeformelen følges nøyaktig. Hjelp dem ved å regne ut inntrinnet og opprinnet.

a) Hvis opptrinnet skal være 15 cm da må inntrinnet være $(63 - 2 \cdot 15)$ cm $=$ 33 cm. Stigningsvinkelen til trappen er da slik at tangens til vinkelen er forholdet opptrinn over inntrinn. Stigningen blir da $\arctan(15/33) = \underline{24.44^\circ}$.

b) Hvis stigningen er 20 grader og opptrinnet er 15 cm, da må inntrinnet være $15\text{cm}/\tan(20^\circ) = 41.21$ cm. Summen av to opptrinn og ett inntrinn blir da $\underline{71.21}$cm.

c) Vi har to likninger som $i$ og $o$ skal tilfredstille: Trappeformelen $2o + i =$ 63 cm, og forholdet mellom inn- og opptrinn $\tan(20^\circ) = o/i$. Dette gir at $(2\tan(20^\circ) + 1)i = 63$ cm. Derfor må $\underline{\ i = 36.46 \text{ cm og } o = 13.27 \text{ cm}}$.

**Oppgave 5**
Vi har tre punkt i rommet: $A(3,4,0)$ og $B(-1,1,0)$ og $C$ slik at

$$\overrightarrow{CA} = [2,3,-2].$$

a) Finn koordinaten til $C$.

b) Hva er vinkelen $\angle C$ i trekanten $ABC$?

c) Trekanten $ABC$ er grunnflaten i en pyramide med topp i punktet $T$ gitt ved $T(4,4,7)$. Finn volumet til pyramiden.

a) Vektoren fra origo til $C$ er lik $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CA} = [1,1,2,]$. Koordinaten til $C$ er $\underline{(1,1,2)}$.

b) Vi tar skalarproduktet mellom vektorene $\overrightarrow{CA} = [2,3,-2]$ og $\overrightarrow{CB} = [-1,1,0] - [1,1,2,] = [-2,0,-2]$. Det er $2(-2) + 0 + (-2)2 = 0$. Derfor er vinkelen mellom vektorene 90 grader. <u>Vinkel $C$ er 90 grader</u>.

c) Volumet til pyramiden er en sjettedel av absoluttverdien til trippelproduktet til $\overrightarrow{CA}$ , $\overrightarrow{CB}$ og $\overrightarrow{CT}$. Vektoren $\overrightarrow{CT}$ er lik $[4,4,7] - [1,1,2] = [3,3,5]$.

Dette er en sjettedel av absoluttverdien til

$$-2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Det er

$$1/6 \cdot |-2(21+0-3)| = \underline{6}.$$