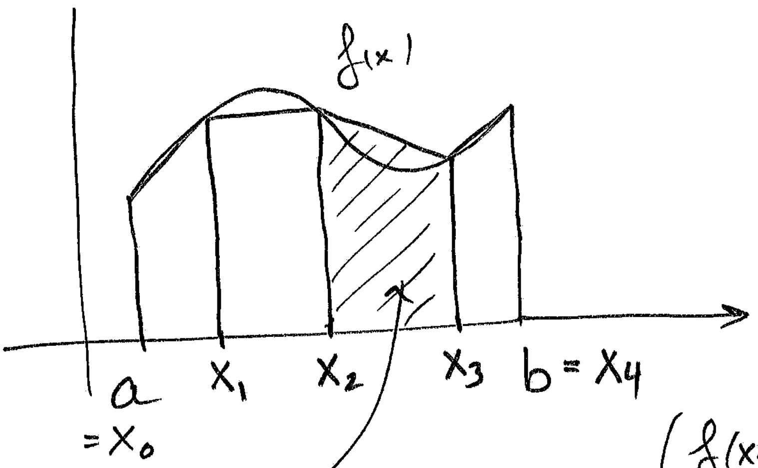
25.04.2013

Numerisk integrasjon

① [a,b] er delt inn i n = 4 intervaller



arealet er $\left(\frac{f(x_3) - f(x_2)}{2}\right) \cdot (x_3 - x_2)$

Deler [a,b] i n like breie deler

$h = \frac{b-a}{n}$

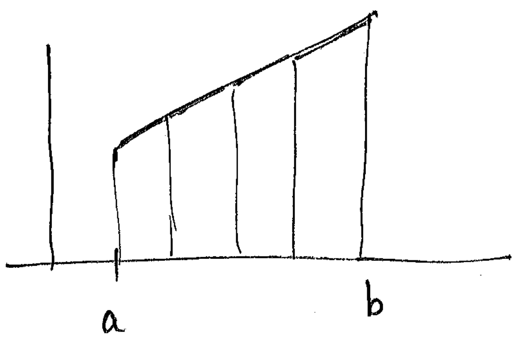
Numerisk estimat av $\int_a^b f(x)\,dx$ basert på trapes metoden er

$$h\left[\frac{f(a)+f(a+h)}{2} + \frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2} + \dots f(b)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 2f(b-h) + f(b)\right]$$

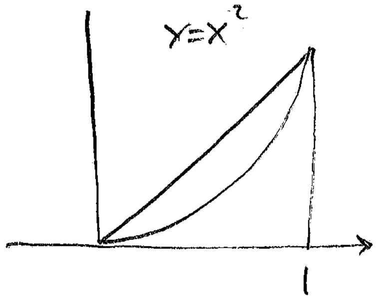
Hvis $f(x) = ax+b$ (lineær funksjon)

da gir trapes metoden nøyaktig svar (for alle n).



Eks

(2)



$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Trapes metoden $(n=1)$ gir $\frac{1}{2}$

Avviket er $\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right| = \underline{\frac{1}{6}}$

Anta f er 2 ganger deriverbar

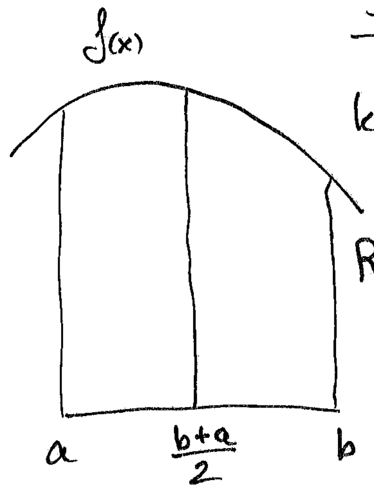
og at $\quad |f^{(2)}(x)| \leq M_2 \quad$ for alle $x \in [a,b]$

Da $\quad \left| \int_a^b f(x)\,dx - \text{Trapes estimat} \right| \leq \dfrac{M(b-a)^3}{12 \cdot n^2}$.

I eksempelet ovenfor er $\quad M = 2$, $\quad b-a = 1$, $\quad n = 1$

$$\frac{M(b-a)^3}{12 \cdot n^2} = \frac{2 \cdot 1}{12 \cdot 1^2} = \underline{\frac{1}{6}}.$$

Simpson metoden



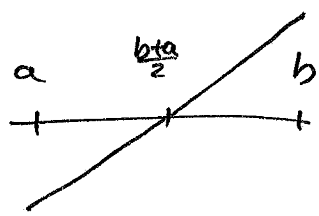
kvadratisk uttrykk

Resultat $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}{6}$

hvis $f(x)$ er et polynom av grad ≤ 3.

1) Dette er sant for konstante uttrykk

2) Vi kan legge til en konstant til et lineært uttrykk s.a $\quad f\left(\frac{b+a}{2}\right) = 0$

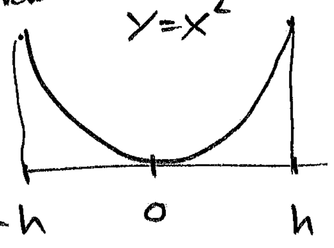


Da er $f(a) + f(b) = 0$

$\int_a^b f(x)\,dx = 0$

så estimatet er like integralet for lineære uttrykk

3) Ved å legge til et lineært uttrykk og skalere kan vi anta at et kvadratisk uttrykk er



(3)

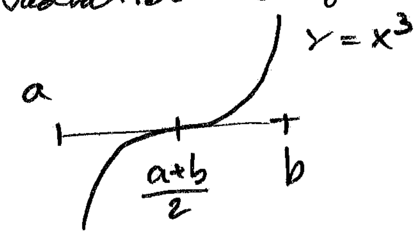
$$\int_{-h}^{h} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-h}^{h} = \frac{2h^3}{3}$$

Ved simpsons metode: $\left(\frac{1}{6}(-h)^2 + \frac{4}{6}0^2 + \frac{1}{6}h^2\right)2h$

$$= \left(\frac{h^2}{6} + \frac{h^2}{6}\right)\cdot 2h = \frac{2h^3}{3}$$

4) Simpsons metode gir også nøyaktig svar ~~for~~ kubiske uttrykk

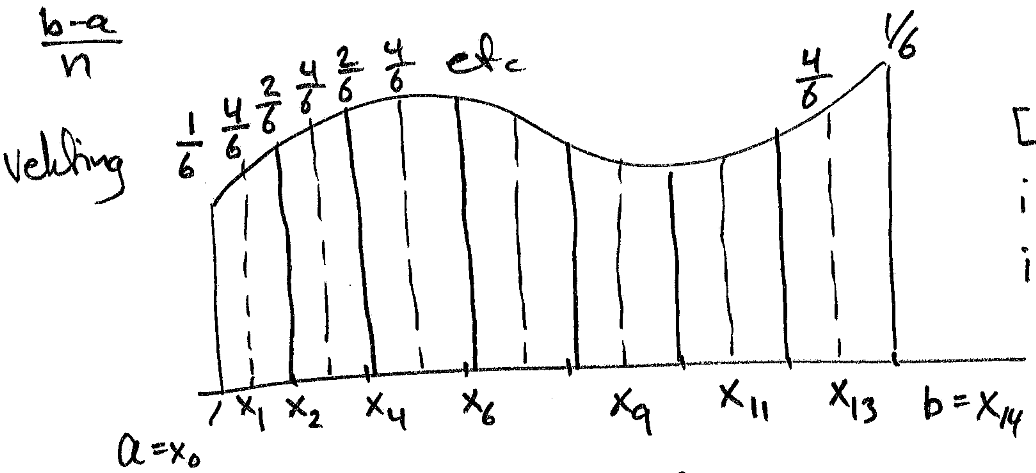
Vi kan legge til et kvadratisk uttrykk (og skalere) og få



Både "formelen" og "integralet" gir 0.

Vi deler $[a, b]$ i $\underline{2n}$ intervaller

$h = \frac{b-a}{n}$



$n=7$

$[a,b]$ er delt i $2\cdot n = 14$ intervaller

Estimatet til $\int_a^b f(x)\,dx$ med simpsons metode:

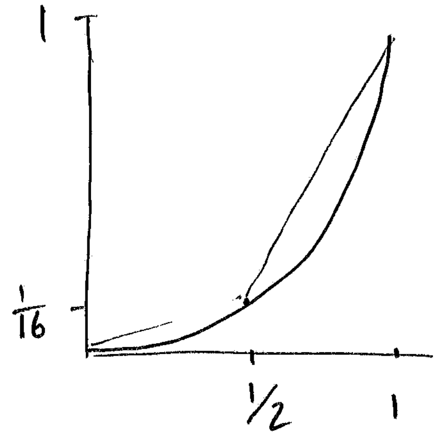
$$\frac{h}{6}\left[f(a) + 4f(a+\tfrac{h}{2}) + 2f(a+h) + 4f(a+\tfrac{h}{2}+h) + \cdots + f(b)\right]$$

Feilestimat til simpsons metode

(4) $\quad M_4 \geq |f^{(4)}(x)| \qquad x \in [a,b]$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \text{Simpson estimatet} \right| \leq \frac{M_4 (b-a)^5}{180 n^4}$$

Trapes og Simpsons metode for $f(x) = x^4$ $\quad a = 0, \; b = 1$:



Eksakt: $\int_0^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{5} = \underline{0.2}$

Trapes metoden : $\frac{f(0) + 2 \cdot f(1/2) + f(1)}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{16} + 1}{4} = \frac{\frac{1}{8} + 1}{4} = \frac{9/8}{4} = \frac{9}{32} = 0.28125$$

Simpsons metode $\frac{f(0) + 4 f(1/2) + f(1)}{6} \cdot 1$

$$= \frac{4 \cdot \frac{1}{16} + 1}{6} = \frac{\frac{1}{4} + 1}{6} = \frac{5/4}{6} = \frac{5}{4 \cdot 6} = \frac{5}{24}$$

$$= 0.20833\ldots$$

Vi implementerte trapes og Simpson metode i geogebra og studerte en del eksempler

...

(Numerisk integrasjon er ikkje eksamensrelevant)