28feb2013 11 Eksponential og logaritme funksjoner

(1)

Potens a^r a grunntall, r eksponent
$a > 0$ r reelt tall

Fast eksponent $y(x) = x^r$

(Potensfunksjoner : $k \cdot x^r$)

eks : $x = x^1$, x^2, x^{19}, $x^{1/2} = \sqrt{x}$

inversfunksjonen til x^r $(r \neq 0)$ er $x^{1/r}$

$(x^{1/r})^r = x^{r/r} = x^1 = x$.

$a = 1$: $1^r = 1$ alle reelle r

$r = 0$: $a^0 = 1$ alle $a > 0$.

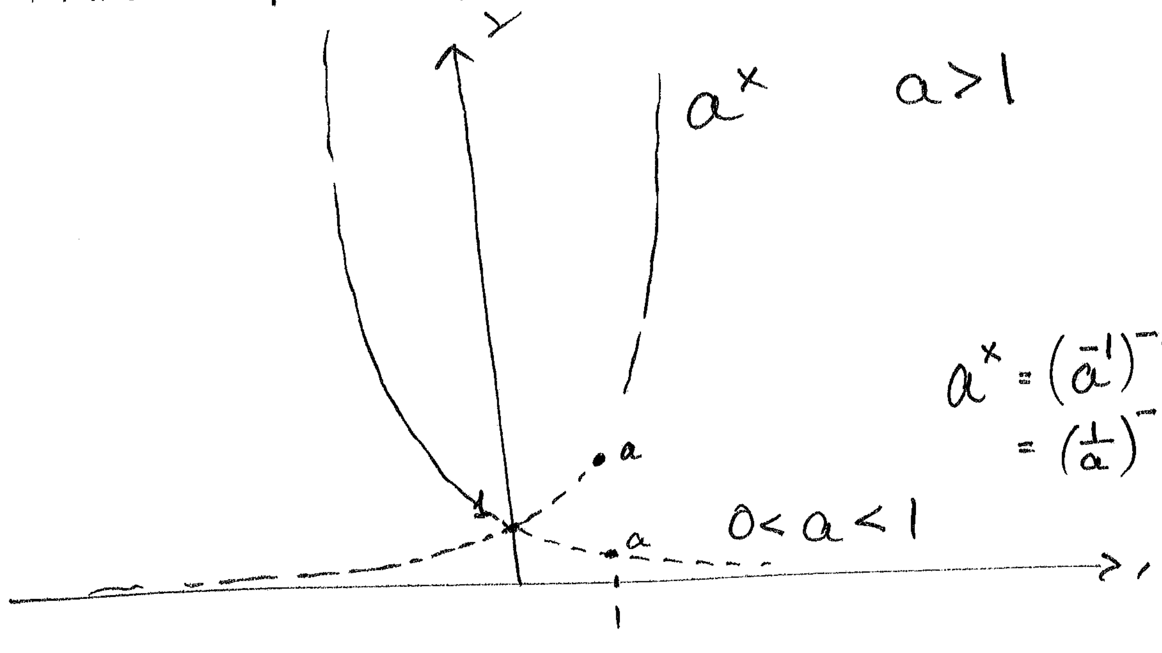
$0 < a$, $\underline{a \neq 1}$

Fast grunntall : $y(x) = a^x$ x alle reelle tall.

(Eksponentialfunksjoner $k \cdot a^x$, k konstant.)

eks : 2^x, 10^x, π^x, $(\frac{1}{2})^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
10^x	$1/1000$	$1/100$	$1/10$	1	10	100	1000	10000	100000



$a^x = (a^{-1})^{-x}$
$= (\frac{1}{a})^{-x}$

$y = a^x$ vokser for $a > 1$

(2) avtar for $a < 1$

Verdimengden er alle positive reelle tall, $\langle 0, \infty \rangle$

Logaritmen til x med basis a
$\text{Log}_a\, x$ (eller $\log_a x$) er eksponenten til a som gir x.

$$a^{\text{Log}_a x} = x$$

$\text{Log}_a\, x$ er invers funksjonen til a^x :

$$a^{(\log_a x)} = x \quad \text{og} \quad \text{Log}_a(a^x) = x$$

$\text{Log}_a(x)$ er definert for $x > 0$
$(0 < a \,,\; a \neq 1)$

$$\text{Log}_{10}(100) = \text{Log}_{10}(10^2) = \underline{2}$$

$$\text{Log}_9(3) = \text{Log}_9(\sqrt{9}) = \text{Log}(9^{1/2}) = \underline{\tfrac{1}{2}}$$

$a = 10$ er en vanlig basis for Logaritme

$$\text{Log}_{10}(x) = \text{Log}(x) = \lg(x) \text{ (brukt av boka)}$$

(Dette er en innebygd funksjon på mange kalkulatorer)

(3) Likningen $a^x = z$ med variabel x

har løsning $x = \text{Log}_a(z)$.

eks. $10^x = 100000 = 10^5$

$x = \text{Log}_{10}(100000) = 5$

$2^x = 32\sqrt{2} = 2^5 \cdot 2^{1/2} = 2^{(5+\frac{1}{2})}$

Så $\underline{x = 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}}$

eks

(*) $10^{2x-1} - 9 \cdot 10^{x-1} - 1 = 0$ ganger med 10 :

$10^{2x} - 9 \cdot 10^x - 10 = 0$

$(10^x)^2 - 9(10^x) - 10 = 0$ Faktoriser polynomet i (10^x)

$(10^x - 10)(10^x + 1) = 0$

$10^x - 10 = 0$ eller $10^x + 1 = 0$

$10^x = 10$ eller $10^x = -1$

ingen løsning.

$\underline{x = 1}$

(*) har løsningen $\underline{x = 1}$

$3^x + 3^{1-x} - 4 = 0$

$3^x + 3 \cdot \frac{1}{3^x} - 4 = 0$ ganger med 3^x

$(3^x)^2 + 3 - 4 \cdot (3^x) = 0$ 2.grads likning i 3^x

$(3^x - 3)(3^x - 1) = 0$

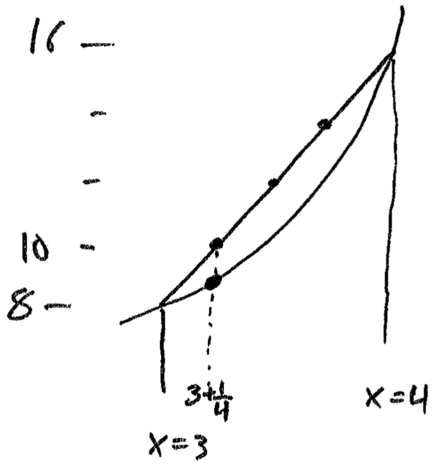
Dette er ekvivalent til $3^x - 3 = 0$ eller $3^x - 1 = 0$

$\underline{x = 1}$ eller $\underline{x = 0}$

(4) $2^x = 10$

2^x økende funksjon

$2^3 = 8 \qquad 2^4 = 16$



Prøver med $3 + \frac{1}{3}$

$2^{3+\frac{1}{3}} = 8 \cdot \sqrt[3]{2} = 10.079\ldots$

Løsningen til $2^x = 10$ er $x = 3.3219\ldots$

Egenskaper til eksponential funksjonen

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ "sum til produkt"

$a^0 = 1$

$(a^1 = a, \; (a^x)^y = a^{x \cdot y})$

Egenskaper til logaritmefunksjonen

$\mathrm{Log}_a(x \cdot y) = \mathrm{Log}_a(x) + \mathrm{Log}_a(y)$ "produkt til sum"

$\mathrm{Log}_a(1) = 0 \qquad (\mathrm{Log}_a(a) = 1)$

$\mathrm{Log}_a(x^r) = r\,\mathrm{Log}_a(x)$

$$\mathrm{Log}_a(x) = \frac{\mathrm{Log}_b(x)}{\mathrm{Log}_b(a)}$$

Alle logaritmer kan uttrykkes ved 10-logaritmen:

$$\mathrm{Log}_a(x) = \frac{\mathrm{Log}(x)}{\mathrm{Log}(a)}$$

(eks $\mathrm{Log}_2(10) = \frac{\mathrm{Log}(10)}{\mathrm{Log}(2)} = \frac{1}{\mathrm{Log}(2)}$)

"bevis" Enkelt eksempel

5 $\text{Log}(100 \cdot 1000) = \text{Log}(10^2 \cdot 10^3) = \text{Log}(10^5) = 5$

$\text{Log}(100) + \text{Log}(1000) = \text{Log}(10^2) + \text{Log}(10^3) = 2+3 = 5$

Generelt: $x \cdot y = a^{\text{Log}_a(x \cdot y)}$

$$x \cdot y = \left(a^{\text{Log}_a(x)}\right) \cdot \left(a^{\text{Log}_a(y)}\right) = a^{\text{Log}_a(x) + \text{Log}_a(y)}$$

eksponentene må være like: $\text{Log}_a(x \cdot y) = \text{Log}_a(x) + \text{Log}_a(y)$.

$$x^r = a^{\text{Log}_a(x^r)}$$

$x = a^{\text{Log}_a(x)}$ så $x^r = \left(a^{\text{Log}_a(x)}\right)^r = a^{r \log_a(x)}$

eksponentene må være like: $\text{Log}_a(x^r) = r\,\text{Log}_a(x)$.

$$\text{Log}\left(\frac{x}{y}\right) = \text{Log}\left(x \cdot (y^{-1})\right) = \text{Log}(x) + \text{Log}(y^{-1})$$

$$= \text{Log}(x) + (-1) \cdot \text{Log}(y)$$

$$\text{Log}\left(\frac{x}{y}\right) = \text{Log}(x) - \text{Log}(y)$$

$a^x = z$ ved def. av log: $x = \text{Log}_a(z)$

$$\text{Log}_b(a^x) = \text{Log}_b(z)$$

$$x\,\text{Log}_b(a) = \text{Log}_b(z)$$

Så $x = \dfrac{\text{Log}_b(z)}{\text{Log}_b(a)} = \text{Log}_a(z)$

((($\text{Log}_a(x) = k \cdot \text{Log}(x)$ k konstant.

setter $x=a$: $1 = \text{Log}_a(a) = k \cdot \text{Log}(a)$, så $k = \dfrac{1}{\text{Log}(a)}$)))

Hva er $\text{Log } 2 + \text{Log } 5 \, ? = \text{Log}(2 \cdot 5) = \text{Log}(10)$

$= 1$

6

Løs likningen $5^x = 10$

$x \approx 1.43$

Løs likningen $3 \text{ Log }(x+1) = 2$

$$x+1 = 10^{\text{Log}(x+1)} = 10^{(2/3)} = \sqrt[3]{10^2}$$

$$\underline{x = \sqrt[3]{100} - 1} \quad (\approx 3.64)$$

Løs likningen $\text{Log } x - \text{Log}(1-x) = 1$

$$\frac{x}{1-x} = 10^{\text{Log}\left(\frac{x}{1-x}\right)} = 10^1 = 10$$

$\frac{x}{1-x} = 10$, ganger med $1-x$

$x = 10(1-x) = 10 - 10x$

$x + 10x = 11x = 10$.

$$\underline{\underline{x = \frac{10}{11}}}$$

$$\underline{a^x} = \left(10^{\text{Log } a}\right)^x = \underline{10^{x \cdot \text{Log } a}}$$

a^x er lik $\underline{10^{k \cdot x}}$ hvor $k = \log a$