5. nov 2012

Kapittel 17 Følger og Rekker

(1) En endelig tallfølge er en ordna mengde med tall

$$a_1,\ \underset{\text{andre ledd}}{a_2},\ a_3,\ \ldots,\ \underset{\text{n-te ledd i følgen}}{a_n}$$

En vendelig tallfølge er en ordna (tellbart) vendelig mengde tall

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

alternativt $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

eller $\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (∞ : vendelig)

<u>Eksempler</u>:

* Følgen av de naturlige tall ordnet etter størrelse

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

$$a_n = n \qquad n \geq 1.$$

* $a_n = (-1)^n \qquad n \geq 1$

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

* Følgen av primtall ordnet etter størrelse

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$$

Dette er en vendelig følge siden det finnes vendelig mange primtall.

Vi har ingen formel for ledd nr. n.

* En tallfølge er gitt **rekursivt** hvis ledd nr. n kan bestemmes fra de foregående leddene.

(2) $X_{(n+1)} = X_n + 2 \qquad X_1 = 2$

$2, 4, 6, 8, 10, \dots$

Formel for ledd nr n : $X_n = 2n \qquad n \geq 1$

(Hvis X_1 hadde vært noe annet enn 2 ville $X_n = 2\cdot(n-1) + X_1$.)

Av og til er det hensiktsmessig å la tallfølger starte med andre ledd enn a_1.

$a_0, a_1, a_2, \dots \qquad$ n-te ledd er a_{n-1}

La tallfølgen $x_0, x_1, x_2, \dots$ være gitt rekursivt ved $x_0 = 1$

$$X_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}$$

De første leddene :

$1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256,$

$X_0 = 1 \qquad n=0$

$X_n = 2^{n-1} \qquad n \geq 1 \qquad$ formel for n-te ledd.

③ Fibonacci følgen

Tallfølge gitt rekursivt ved

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad (F_2 = 1)$$

De første leddene:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

Vi kan finne en formel for det n-te Fibonacci-tallet, F_n.

$$F_n = \frac{1}{\varphi + 1/\varphi}\left(\varphi^n - (-1)^n\left(\frac{1}{\varphi}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(\sqrt{5}+1)^n - (-1)^n(\sqrt{5}-1)^n}{2^n}\right).$$

$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
$= 1.618\ldots$
"Det gylne snitt".

Bevis

φ og $\frac{-1}{\varphi}$ er røttene til $x^2 = x + 1$

La $x_n = \varphi^n$ og $y_n = \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n$

Da er $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ $\quad \left((\varphi^2 = \varphi + 1) \cdot \varphi^n\right)$

$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$, og derfor

$$(a x_{n+2} + b y_{n+2}) = (a x_{n+1} + b y_{n+1}) + (a x_n + b y_n)$$

For alle reelle tall a og b oppfyller

$z_n = a x_n + b y_n$ den rekursive betingelsen.

Bestemmer a og b slik at

$z_0 = 0$ og $z_1 = 1$.

$$Z_0 = a \cdot \varphi^0 + b \cdot \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^0 = 0$$

(4) $$= a + b = 0$$

Så $\underline{b = -a}$.

$$Z_1 = a \cdot \varphi + b\left(\frac{-1}{\varphi}\right) = 1$$

$$= a\left(\varphi - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)\right) = a\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right) = 1$$

Så $a = \dfrac{1}{\varphi + 1/\varphi}$.

siden $Z_0 = F_0 = 0$

$Z_1 = F_1 = 1$

$n \geq 0$ $Z_{n+2} = Z_{n+1} + Z_n$ og $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

så må $Z_n = F_n$

$$\underline{F_n = \frac{1}{\varphi + 1/\varphi}\left(\varphi^n - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n\right)} \qquad n \geq 0$$

Grenser av tallfølger

5

En tallfølge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ konverger til et tall a hvis a_n nærmer seg a når n blir stor.

Eks * $a_n = \frac{1}{n}$ $n \geq 1$

Tallfølgen $\{a_n\}$ konvergerer til 0.

* $a_n = (-1)^n$, $-1, 1, -1, \ldots$

Denne tallfølgen konvergerer ikke.

* $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

$\{a_n\}$ konvergerer til 0.

* $a_n = \frac{n}{n+1}$ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

$\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\{a_n\}$ konvergere til 1.

* $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ $n \geq 1$

$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \ldots$

$\{a_n\}$ konvergere til det gylne snitt, φ.

* $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$b_n = \sqrt{n^2+n} - n$

$= \sqrt{n} \cdot a_n$

Tallfølgen $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ konverger til 0

(6) $b_n = \sqrt{n^2+n} - n$ konverger til $\frac{1}{2}$

bevis

$$b_n = \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$= \frac{(n^2+n) - n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

når n blir veldig stor går dette mot $\frac{1}{2}$.

(nevneren: $n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)$)

Hvis følgen $\{a_n\}$ konverger til a når n går mot uendelig

så skriver vi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

(lim: grense)

Presis definisjon:

$\{a_n\}$ konvergerer til a hvis det for alle naturlige tall M finnes et naturlig tall N slik at

$$|a_n - a| < \frac{1}{M} \quad \text{når} \quad n \geq N.$$