TALL

H. Fausk

1 De naturlige tallene

De **naturlige tallene** er 1, 2, 3, 4, 5, ... (og så videre). Disse tallene brukes til å telle med, og de kalles også telletallene. Listen med naturlige tall stopper ikke opp. Gitt et tall kan vi alltid legge til 1 og få et større tall. Vi sier da at det er uendelig mange naturlige tall.

Vi kan addere to naturlige tall og få et nytt naturlig tall. Å addere kalles også å "summere", "plusse" eller "legge sammen". Vi skriver operasjonen med symbolet pluss, $+$, mellom tallene. Hvis vi har m kuler i en boks og n kuler i en annen boks, så er summen $m + n$ det totale antall kuler i begge boksene.

Vi bruker symbolet $=$ mellom to tall for å si at de er like. Symbolet $\neq$ mellom to tall betyr at de er forskjellige. For eksempel $2 \neq 3$, $2 + 3 = 5$ og $13 + 19 = 32$. Når vi har tre tall kan vi først legge sammen to av tallene og deretter addere summen deres og det tredje tallet. Vi bruker paranteser for å angi hvilke par av tall som legges sammen. For eksempel $(2 + 5) + 9 = 7 + 9 = 16$. **Addisjon** har egenskapene:

$$
\begin{aligned}
(x + y) + z &= x + (y + z) && \textbf{assosiativitet} \\
x + y &= y + x && \textbf{kommutativitet}
\end{aligned}
$$

for alle naturlige tall x, y, og z. Addisjon har også egenskapen at hvis

$$x + z = y + z$$

så er $x = y$. Denne egenskapen kalles **kanselleringsegenskapen**.

Siden addisjon er assosiativ utelater vi ofte parantesene som angir rekkefølgen to og to tall adderes sammen i

$$x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z).$$

Gjentatt bruk av assosiativitet fører også til at rekkefølgen man adderer to og to tall i er likegyldig selv når det er mer enn tre tall som skal adderes. Vi skriver derfor bare $1+2+3+4+5$ uten å angi en rekkefølge som to og to tall skal adderes i, for eksempel $(1 + (2 + 3)) + (4 + 5)$. Kommutativitet gir at rekkefølgen til tallene er likegyldig. For eksempel er $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 4 + 3 + 2 + 5 + 1$. Gitt en endelig samling tall kan vi velge en oppstilling av dem fra venstre til høyre, og så velge en rekkefølge som to og to tall skal adderes i. Summen er uavhengig av valgene vi gjør.

De naturlige tallene er ordnet etter størrelse. Et naturlig tall x er **mindre enn** et naturlig tall y hvis det finnes et tredje naturlig tall z slik at $x + z = y$. Vi skriver $x < y$ hvis x er mindre enn y (dette er det samme utsagnet som $y > x$, at y er større enn x og forskjellig fra x). Vi skriver $x \leq y$ hvis x er mindre enn y, eller lik y. Det kan være upresist hva som menes med x mindre enn y. For å presisere kan man si at x er **ekte mindre enn** y ($x < y$) eller at x er **mindre enn eller lik** y ($x \leq y$).

Ordningen har følgende egenskaper: Hvis $x \leq y$ og $y \leq z$ da er $x \leq z$. For alle naturlige tall x og y så er enten $x \leq y$ eller så er $y \geq x$. Hvis $x \leq y$ og $y \leq x$ så er $x = y$. En ordning med denne egenskapen kaller vi en **total ordning**.

Multiplikasjon på de naturlige tallene kan beskrives ved hjelp av addisjon. Produktet av x med y, eller x multiplisert med y, er summen av y addert med seg selv x ganger, $y + y + \cdots + y$ hvor y forekommer x antall ganger. Vi sier ofte "x ganger y", og skriver $x \times y$, $x \cdot y$ eller bare xy. Gangetegn bør brukes der hvor misforståelser kan forekomme. Produktet $12\,7$ forveksles lett med tallet 127 så det er bedre å skrive $12 \cdot 7$.

I følgende tabell er tallet i rad nummer n og søyle nummer m lik $n \cdot m$. Dette er gangetabellen for tallene fra 1 til 9. (Rader er horisontale (—) og søyler er vertikale.)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Multiplikasjon er kommutativ

$$x \cdot y = y \cdot x$$

for alle naturlige tall x og y. Det er slik fordi det er samme antall kvadrater i x rader med y kvadrater i hver rad som det er i y rader med x kvadrater i hver rad. Antall små kuber, med sidelengde 1 enhet, i en boks med sidelengder x, y og z avhenger bare av de naturlige tallene x, y og z. Derfor er multiplikasjon assosiativ

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

for alle naturlige tall x, y, og z.

Å legge sammen x med seg selv $y + z$ ganger er det samme som å legge sammen x med seg selv først y ganger så z ganger og deretter legge disse summene sammen. Derfor er **multiplikasjon distributiv over addisjon**

$$(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x) \quad \text{distributivitet}$$

for alle naturlige tall x, y, og z. Siden multiplikasjon er kommutativ så er også

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

for alle naturlige tall x, y, og z. Distributivitet brukes gjentatte ganger for å "gange ut parantesene" i et produkt av to summer. For eksempel

$$(a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Multiplikasjon på naturlige tall har kanselleringsegenskapen. Hvis x, y og z er naturlige tall slik at $x \cdot y = x \cdot z$ så er $y = z$ (merk at $x \geq 1$).

Siden multiplikasjon er assosiativ utelater vi ofte paranteser som angir rekkefølgen vi ganger sammen to og to tall. Kommutativitet og assosiativitet til multiplikasjon gir, som for addisjon, at produktet av en endelig samling tall er veldefinert (uavhengig av valgene vi gjør).

Vi sier at a og b er **summander** i $a + b$ og at a og b er **faktorer** i $a \cdot b$. Tilsvarende for summer og produkt av mer enn to tall. For eksempel er $2, 4$ og 9 summander i $2 + 4 + 9$. I tilegg brukes begrepet faktor i følgende betydning. Vi sier at et naturlig tall x er en faktor i et naturlig tall z, eller x **deler** z, hvis det finnes et naturlig tall y slik at $x \cdot y = z$. I noen sammenhenger sier vi at y er **divisor**, z er **divident** og x er **kvotient** hvis $xy = z$. Hva som er kvotient og hva som er divisor er bestemt av sammenhengen. For eksempel er 3 en divisor i 21 med kvotient 7, og 7 er en divisor i 21 med kvotient 3.

Hvis både addisjon og multiplikasjon er brukt i et uttrykk gis det preferanse til multiplikasjon ("først multiplikasjon så addisjon")

$$ab + c = (ab) + c.$$

For eksempel er $2 \cdot 3 + 1 = 7$ men $2 \cdot (3 + 1) = 8$. Dette er en regel for bruk av notasjonen (skrivemåten) som er innført for at vi skal slippe å skrive så mange paranteser.

De er vanlig å skrive de naturlige tall som $\mathbb{N}$. De naturlige tall er totalt ordnet og har operasjonene addisjon og multiplikasjon.

En annen operasjon på de naturlige tall er **potensopphøyning**. La x^n betegne tallet

$$x^n = x \cdot x \cdots x$$

hvor x multipliseres med seg selv n ganger. For eksempel så er $x^1 = x$, $x^2 = x \cdot x$, og $x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$. Vi sier at x^n er x opphøyd i n-te **potens**. Når $n = 2$ sier vi også at x^2 er kvadratet til x (dette er arealet til et kvadrat med sider av lengde x). Potensopphøying er en operasjon som tar inn to tall og gir ut ett tall. Her er noen egenskaper til potensopphøyning. Produktet av x multiplisert med seg selv m ganger og x multiplisert med seg selv n ganger er lik x multiplisert med seg selv $m+n$ ganger. Derfor har vi egenskapen

$$x^m x^n = x^{m+n}$$

hvor x, m og n er naturlige tall. Hvis vi ganger x med seg selv m ganger og deretter ganger det resulterende tallet med seg selv n ganger er produktet lik tallet vi får ved å gange x med seg selv $m \cdot n$ ganger. Derfor har vi

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

hvor x, m og n er naturlige tall. Vi har at

$$(xy)^n = x^n y^n$$

siden multiplikasjon er kommutativ og assosiativ.

Potensopphøying utføres før multiplikasjon, så $2 \cdot 3^4 = 2 \cdot (3^4) = 2 \cdot 81 = 162$, mens $(2 \cdot 3)^4 = 2^4 3^4 = 16 \cdot 81 = 1296$. Denne regelen følges ikke for fysiske enheter. En kilometer er tusen meter, $1km = 1000 \cdot m$. En kilometer i andre potens, $1km^2$, betyr $1(km)^2 = 1000000m^2$ og ikke $1k(m^2) = 1000m^2$.

En n-te potens av en sum er beskrevet ved binomialformelen i seksjon **??**.

Oppgave 1 *Finn de naturlige tallene lik 2^n for alle naturlige tall n opp til og med 12.*

Oppgave 2 *Finn de naturlige tallene lik*

$$2 + 3(4 + 5), \quad (2 + 3)(4 + 5), \quad (2 + 3)4 + 5, \quad 2 + 3 \cdot 4 + 5.$$

Oppgave 3 *Finn de naturlige tallene lik*

$$23^2, \quad 2 \cdot 3^2, \quad 2^2 3^2, \quad (2^3)^2, \quad 2^{3^2}.$$

Oppgave 4 *Finn de naturlige tallene lik*

$$2^4 + 3^4, \quad (2 + 3)^4, \quad 2 + 3^4, \quad 2 \cdot 3^4, \quad (2 \cdot 3)^4.$$

Oppgave 5 *La $S(n)$ være summen av de n første naturlige tallene*

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Vis at $S(n) + S(n) = 2S(n)$ er lik $n(n + 1)$.

Oppgave 6 *Finn summen av de 1000 første naturlige tallene.*

Oppgave 7 *Vis hvorfor $xy > x$ for alle naturlige tall x og y slik at $y \geq 2$.*

2 Primtall

Et naturlig tall kan noen ganger skrives som et produkt av andre naturlige tall. Siden $1 \cdot x = x$ for alle x, ser vi bort fra produkt med 1. For eksempel er

$$4 = 2 \cdot 2, \quad 6 = 2 \cdot 3, \quad 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2, \quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 39 = 3 \cdot 13.$$

Et **primtall** er et naturlige tall større enn eller lik 2 som ikke kan skrives som et produkt av minst to naturlige tall større enn eller lik 2. Det er praktisk å utelate 1 fra primtallene. Her er de 12 minste primtallene.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.$$

Et naturlig tall n sier vi er **delelig** med et naturlig tall m hvis det finnes et naturlig tall k slik at $km = n$. Alle naturlige tall er delelige med seg selv og 1 siden $n = 1 \cdot n$. Et naturlig tall er et primtall hvis og bare hvis det er ulik 1, og de eneste naturlige tallene det er delelig med er seg selv og 1.

Lemma 1 *Alle naturlige tall ekte større enn 1 er delelige med minst ett primtall.*

Bevis: Anta at n er det minste naturlige tallet større enn eller lik 2 som ikke er delelig med et primtall. Da kan n ikke vere et primtall og er derfor et produkt $x \cdot y$ av naturlige tall x og y som må være ekte mindre enn n og ekte større enn 1 (ved Oppgave 7). Siden x og y er delelige med minst ett primtall så må også n være delelig med minst ett primtall. Dette motstrider mot antakelsen at n ikke er delelig med et primtall. Derfor finnes det ikke et minste naturlig tall større enn eller lik 2 som ikke er delelig med et primtall. Konklusjonen er at alle naturlige tall, bortsett fra 1, er delelig med minst ett primtall.

Følgende bevis var kjent for Euclid som levde for over to tusen år siden.

Teorem 1 *Det finnes uendelig mange primtall.*

Bevis: Anta at det finnes et endelig antall primtall. La disse være $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\ldots$, p_N ordnet etter størrelse. Vi konstruerer et tall som er forskjellig fra alle disse primtallene men som samtidig ikke lar seg dele av dem. Tallet

$$P = p_1 \cdots p_N + 1$$

er et naturlig tall ekte større enn p_N som ikke kan deles av primtallene p_1, p_2, $\ldots$, p_N. Siden alle naturlige tall ekte større enn 1 er delelig med minst ett primtall, kan ikke dette være mulig. Antakelsen at det finnes et endelig antall primtall må være gal, og derfor finnes det uendelig mange primtall.

Her er noen berømte spørsmål om primtall som ingen så langt har klart å besvare.

Er alle naturlige tall $n \geq 4$ som er delelig med 2 en sum av to primtall? (Goldbachs formodning.)

Et primtallspar består av to primtall (p_1, p_2) slik at $p_1 + 2 = p_2$. De fem første primtallsparene er $(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31)$. Finnes det uendelig mange primtallspar?

Et primtall som er på formen $2^n - 1$ for et heltall $n \geq 2$ kalles et Mersenne primtall. De fem første Mersenne primtallene er $3, 7, 31, 127, 8191$. Finnes det uendelig mange Mersenne primtall?

Finnes det uendelig mange primtall på formen $n^2 + 1$ for heltall n?

Oppgave 8 *Finn alle primtall mindre enn 100.*

Oppgave 9 *Gitt et naturlige tall n. Vis at det finnes et naturlig tall x slik at alle naturlige tall mellom x og $x + n$ ikke er primtall.*

Oppgave 10 *Tallet $2^{11} - 1 = 2047$ er et produkt av to primtall. Finn disse to primtallene.*

3 De ikke-negative heltallene

Tallet 1 spiller en spesiell rolle for multiplikasjon fordi

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

for alle x. Det kan ikke finnes mer enn ett element med denne egenskapen. Her er et bevis. Anta at både A og B har egenskapen at $x \cdot A = A \cdot x = x$ og $x \cdot B = B \cdot x = x$ for alle x. Ved å sette inn for henholdsvis $x = B$ og $x = A$ får vi at $A = A \cdot B = B$. Vi sier at 1 er det **multiplikative enhetselementet**.

De naturlige tall har ikke et enhetselement for addisjonsoperasjonen. Vi utvider de naturlige tall ved å legge til et enhetselement for addisjon. Det additive enhetselementet har symbol 0 og kalles **null**. Det har egenskapen at $0 + x = x + 0 = x$ for alle x. Ordningen utvides ved at $0 < x$ for alle naturlige tall x. Vi ønsker at denne utvidningen av de naturlige tall skal ha de samme regneregler som de naturlige tall. For at distributivitet skal holde må

$$y \cdot x = (y + 0) \cdot x = y \cdot x + 0 \cdot x$$

for alle x og y. Dette er mulig hvis $0 \cdot x = 0$, fra definisjonen av 0, men det er umulig hvis $0 \cdot x$ er et naturlig tall. Derfor må

$$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$$

for alle x. Den multiplikative kanselleringsegenskapen er derfor ikke gyldig.

Operasjonene addisjon og multiplikasjon på de naturlige tall sammen med 0 tilfredsstiller additiv og multiplikativ assosiativitet og kommutativitet samt distributivitet. De naturlige tall sammen med 0 kalles gjerne for de **ikke-negative heltall**.

For at reglene for potensregning forsatt skal være gyldige for ikke-negative heltall må $x^0 = 1$, for alle naturlige tall x. Størrelsen 0^0 er ikke bestemt av regnereglene for potensregning (både 0 og 1 er mulige siden $x^0 = (x^0)^n$ for alle n). Det viser seg at det ofte er mest hensiktsmessig å la $0^0 = 1$. Vi følger denne praksisen.

Oppgave 11 *Sjekk at de naturlige tall sammen med 0 tilfredsstiller egenskapene som påstått.*

4 Heltallene

Vi utvider de ikke-negative tallene ved å legge til et element y til hvert naturlig tall x slik at $x + y = y + x = 0$. Vi behøver ikke innføre et slikt element til 0 siden $0 + 0 = 0$. Vi ønsker å utvide multiplikasjon og addisjon slik at regnereglene til de naturlige tall fortsatt er gyldige for dette utvida tallsystemet.

Assosiativitet til addisjon gir at et slikt element y er bestemt av x: Hvis både y og z har denne egenskapen så er

$$z = z + 0 = z + (x + y) = (z + x) + y = 0 + y = y.$$

Elementet y kalles det **additive inverselementet** til x. Vi innfører additive inverselementer ved å legge til abstrakte symboler $-x$, "minus x", og kreve at $x + (-x) = (-x) + x = 0$. Tallene $-x$ for naturlige tall x kalles for de **negative heltallene**. De naturlige tallene kalles også de **positive heltallene**. Elementet -0 er lik 0. Samlingen av negative og positive heltall samt 0 kalles **heltallene**.

Vi undersøker hvilke regneregler heltallene må tilfredstille for at additiv og multiplikativ assosiativitet og kommutativitet samt distributivitet skal være gyldig, og at 1 skal være det multiplikative enhetselementet og 0 det additive enhetselementet.

La x og y være naturlige tall. Assosiativitet og kommutativitet av addisjon gir følgende regler for addisjon: Hvis $x = y$ så er $x + (-y) = 0$. Hvis $x > y$ finnes det et tall z slik at $y + z = x$. Ved å legge til $(-y)$ på begge sider og benytte at $y + (-y) = 0$ får vi at $x + (-y) = z$. Hvis $x < y$ finnes det et tall w slik at $x + w = y$ og vi har at $x + (-y) = (-w)$. Sumen av to negative tall er gitt ved $(-x) + (-y) = (-(x + y))$ siden

$$0 = (x + (-x)) + (y + (-y)) = (x + y) + ((-x) + (-y)) = 0.$$

Distributivitet gir at $(-x)y = (-xy)$ og at $(-x)(-y) = xy$. Den første likheten følger siden $0 = 0 \cdot y = (x + (-x)) \cdot y = x \cdot y + (-x)y$. Den andre likheten følger fra den første siden

$$0 = 0 \cdot (-y) = (x + (-x)) \cdot (-y) = x \cdot (-y) + (-x)(-y) = (-xy) + (-x)(-y).$$

Regnereglene ovenfor gir at både addisjon og multiplikasjon er assosiative og kommutative samt at distributivitet holder for heltallene. Det er vanlig å skrive $(-y)$ som $-y$, $x + (-y)$ som $x - y$ og $(-y) + x$ som $-y + x$. Derfor er $-(x + y) = -x - y$.

Ordningen på heltallene er gitt ved å utvide definisjonen av ordningen på de naturlige tallene. Et heltall x er ekte mindre enn et heltall y, $x < y$, hvis det finnes et naturlig tall z slik at $x + z = y$. Fra definisjonen av ordningen er $x < y$ hvis og bare hvis $x + z < y + z$ for heltall x, y og z. Et heltall x er et **negativt heltall** hvis og bare hvis $x < 0$. Et heltall x er et **positivt heltall** hvis og bare hvis $x > 0$. Heltallene (tysk: Zahlen) betegnes ofte med $\mathbb{Z}$. De ikke-negative heltallene er heltallene x slik at $x \geq 0$. De ikke-negative heltallene skriver vi iblant som $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. De positive heltallene er de naturlige tallene.

Produktet av et positivt og et negativt heltall er negativt, mens produktet av to positive eller to negative heltall er positivt. Hvis $a < b$ og $c > 0$, da er $ac < bc$. Hvis $a < b$ og $c < 0$, da er $ac > bc$. Vi viser hvorfor den siste påstanden holder. Siden $a < b$ så finnes det et naturlig tall d slik at $a + d = b$. Derfor er $ac + dc = bc$. Siden $c < 0$ og $d > 0$ så er $dc < 0$ og derfor er $-dc > 0$. Siden $ac = bc + (-dc)$ følger det at $ac > bc$.

Produktet $(-2) \cdot 5$ er lik $-(2 \cdot 5) = -10$. Produktet $5 \cdot (-2) = -10$ må ikke forveksles med $5 - 2 = 3$.

Her er fire ulikheter $-4 < 1$, $1 \leq 9$, $-2 < 0$, $-5 < -3$. Det er vanlig å slå sammen ulikheter. De to første ulikhetene kan skrives som $-4 < 1 \leq 9$.

Vi har at $-2 < 5$ men $(-3)(-2) = 6 > -15 = (-3)5$.

Et heltall x er delelig med et heltall y, ulik null, hvis det finnes et heltall k slik at $ky = x$. Et heltall x som er delelig med 2 kalles et **partall**. Med andre ord x er et partall hvis og bare hvis det er lik $2k$ for et heltall k. Heltall som ikke er partall kalles **oddetall**, de er lik $2k + 1$ for heltall k. Tallene $-4, -2, 0, 2, 4, 6$ er eksempler på partall og $-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7$ er eksempler på oddetall. Et partall kalles også et **jevnt tall**. Summen til to partall, eller to oddetall, er et partall. Summen av et partall og et oddetall er et oddetall.

Absoluttverdien til et heltall x er x hvis $x \geq 0$ og $-x$ hvis $x < 0$. Vi skriver absoluttverdien til x som $|x|$. Absoluttverdien til et heltall er et ikke-negativt heltall. Vi har for eksempel at $|0| = 0$, $|4| = 4$ og $|-5| = 5$. Absoluttverdien til et tall kalles også størrelsen eller tallverdien til tallet. Absoluttverdien har egenskapen $|x + y| \leq |x| + |y|$ for alle x og y.

Oppgave 12 *Finn heltallene lik* $3-(2+4)$, $3-2+4$, $3-2-4$.

Oppgave 13 *Finn heltallene lik* $9-5$, $9(-5)$, $9-(5)$, $9-(-5)$, $-9(-5)$, $-9-5$.

Oppgave 14 *Finn heltallene lik*

$$-(-2)^2,\ (-3)^3,\quad (2-3)^4,\ 2-3^4,\ 2+(-3)^4.$$

Oppgave 15 *Vis at produktet av to oddetall er et oddetall.*

Oppgave 16 *Vis påstanden: Hvis* n *er et naturlig tall, da er* $x^n - x$ *delelig med 2 for alle heltall* x.

Oppgave 17 *Finn summen av de* n *første naturlige partallene og summen av de* n *første naturlige oddetallene.*

Oppgave 18 *Finn heltallet lik den alternerende summen av de* n *første naturlige tallene (fortegnene til heltallene alternerer mellom positivt og negativt)*

$$1-2+3-4+5-6+-\cdots \pm n$$

hvor fortegnet foran n *er pluss hvis* n *er et oddetall og minus hvis* n *er et partall.*

Oppgave 19 *La* n *være et naturlig tall. Finn antall forskjellige par av naturlige tall* x *og* y *slik at* $x+2y=n$. *Finn antall forskjellige par av naturlige tall* x *og* y *slik at* $3x+2y=n$.

5 Konjugatsetningen

Konjugatsetningen sier at for alle heltall a og b så er

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Produktet $103 \cdot 97$ er lik $(100+3)\cdot(100-3)=10000-9=9991$.

Mer generelt, for n et naturlig tall så er

$$(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n)(a-b) = a^{n+1} - b^{n+1}. \tag{1}$$

Dette ser vi ved å gange ut parantesene (bruke distributivitet) og observere at alle ledd i addisjonen, bortsett fra de to leddene a^{n+1} og $-b^{n+1}$, forekommer parvis og med motsatt fortegn slik at de kanselerer hverandre (summen er 0)

$$\begin{aligned} &a^{n+1} + a^n b + a^{n-1}b^2 + a^{n-2}b^3 + \cdots + ab^n \\ &\qquad - a^n b - a^{n-1}b^2 - a^{n-2}b^2 - \cdots - ab^n - b^{n+1}. \end{aligned}$$

Ved å la a være 1 gir dette spesielt

$$(1+b+b^2+\cdots+b^n)(1-b) = 1-b^{n+1}.$$

Summen $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{12}$ er derfor lik $(2^{13}-1)$.

Oppgave 20 *Finn heltallene lik* $13 \cdot 7$, $887 \cdot 913$, $999 \cdot 1001$, $405 \cdot 295$.

Oppgave 21 *Hvis* $2^n - 1$ *er et primtall, vis at da må* n *også være et primtall.*

Oppgave 22 *Når* n *er et oddetall gi en faktorisering av* $x^n + y^n$ *analog til faktoriseringen av* $x^n - y^n$ *gitt i (1).*

Oppgave 23 *Hvis* $2^n + 1$ *er et primtall, vis at da må* n *være en potens av 2. Primtall på denne formen kalles for Fermat primtall.*

Oppgave 24 *Anta* $0 \leq a < b$. *Vis at* $a^n < b^n$ *for alle naturlige tall* n. *Vis også at*

$$(b-a)na^{n-1} \leq b^n - a^n \leq (b-a)nb^{n-1}$$

for alle $n \geq 1$ *og* $0 \leq a \leq b$.

6 Euklids algoritme og primtallsfaktorisering

Teorem 2 (Divisjonsteoremet) *La* $a > 0$ *og* $b \geq 0$ *være heltall. Da finnes det akkurat to heltall* q *og* r *slik at* $q \geq 0$, $0 \leq r < a$ *og* $b = qa + r$.

Tallet q er antall ganger vi kan trekke a fra b og fremdeles få et ikke-negativt tall, og r er resten som da står igjen. For eksempel hvis $a = 121$ og $b = 1000$, da er $q = 8$ og $r = 32$ siden $1000 = 8 \cdot 121 + 32$.

Vi sier at to heltall a og b er **relativt primiske** hvis det ikke finnes et primtall som deler både a og b. For eksempel så er 5 og 9 relativt primiske, mens 28 og 10 ikke er relativt primiske siden 2 deler begge tallene.

Teorem 3 *Hvis* a *og* b *er relativt primiske naturlige tall, da finnes det heltall* m *og* n *slik at* $ma + nb = 1$.

Bevis: Vi skal vise dette ved å gi en algoritme ("en oppskrift") for å finne to slike tall m og n. Denne algoritmen kalles **Euklids algoritme**. Hvis $a = b$, da må $a = b = 1$ og $m = 1$ og $n = 0$ gir at $ma + nb = 1$. Anta derfor at tallene er forskjellige og at $a < b$. Det finnes da et tall r_1 slik at $b = qa + r_1$ og $0 \leq r_1 < a$. Hvis $r_1 = 0$ da vil a dele b og derfor må $a = 1$. Hvis $a \geq 2$ da må $r_1 > 0$. Tallene a og r_1 må være relativt primiske, for hvis ikke finnes det et primtall p som deler dem og dermed også b. Dette strider mot at a og b er relativt primiske. Hvis $r_1 \neq 1$ kan vi gjenta prosessen en gang til med $r_1 < a$ og finner et tall r_2 slik at $a = q_2 r_1 + r_2$ og $0 < r_2 < r_1$ og r_1 og r_2 er relativt primiske. Vi gjentar prosedyren og finner en avtagende følge av heltall $b > a > r_1 > r_2 > \cdots > r_n > 0$. Den siste resten r_n må være 1 ved argumentet ovenfor. Siden r_n er en sum av heltall ganget med a og b finnes heltall m og n slik at $ma + nb = 1$.

Vi benytter Euklids algoritme på tallene 17 og 19. Vi har at $19 = 1 \cdot 17 + 2$ og $17 = 8 \cdot 2 + 1$ Derfor er

$$1 = 17 - 8(19 - 17) = 9 \cdot 17 - 8 \cdot 19.$$

Vi benytter Euklids algoritme på tallene 127 og 541. $541 = 4 \cdot 127 + 33$, $127 = 3 \cdot 33 + 28$, $33 = 28 + 5$, $28 = 5 \cdot 5 + 3$, $5 = 3 + 2$, $3 = 2 + 1$. Dette gir at

$$1 = 3 - 2 = 2 \cdot 3 - 5 = 2 \cdot 28 - 11 \cdot 5 = 13 \cdot 28 - 11 \cdot 33 =$$

$$13 \cdot 127 - 50 \cdot 33 = 213 \cdot 127 - 50 \cdot 541.$$

Teorem 4 *Hvis et primtall p deler et produkt ab av naturlige tall a og b så må p dele minst en av a og b.*

Bevis: Anta at p ikke deler a. Da er a og p relativt primiske og det finnes heltall m og n slik at $1 = ma + np$. Dette gir at $b = mab + npb$ er delelig med p siden ab er delelig med p. Derfor vil p dele a eller b.

Teorem 5 *Et hvert naturlig tall $n \geq 2$ kan skrives som et produkt av primtall. Hvilke primtall som forekommer og antall ganger de forekommer er bestemt av n.*

Dekomponeringen av et tall som et produkt av potenser av primtall kalles **primtallsfaktoriseringen** av tallet. For å slippe å utelate $n = 1$, kan vi si at primtallsfaktoriseringen til 1 er produktet av ingen primtall.

Bevis: Hvis $n \geq 2$ ikke er et primtall, finnes det ved Lemma 1 et primtall p slik at n er lik pk. Gjenta prosdyren med k i stedet for n. Etter endelig mange repetisjoner stopper prosessen opp. Så n er et produkt av primtall. Anta at n kan skrives som et produkt av primtall på to måter. Den multiplikative kanseleringsegenskapen for naturlige tall og Teorem 4 gir at antall ganger et primtall forekommer i begge faktoriseringene er lik for alle primtall.

La a og b være to naturlige tall. Den **største felles faktor** til a og b er det største naturlige tallet som er en faktor i både a og b. Det skrives som $ssf(a, b)$, eller bare (a, b). Vi sier at c er et (heltalls)**multiplum** av a hvis det finnes et heltall n slik at $c = n \cdot a$. Det **minste felles multiplum** av a og b er det minste naturlige tallet som er et multiplum av både a og b.

Lemma 2 *Hvis d er største felles faktor til a og b så finnes det heltall m og n slik at $ma + nb = d$.*

Bevis: La A og B være naturlige tall slik at $Ad = a$ og $Bd = b$. Da er A og B relativt primiske. Fra Teorem 3 finnes det heltall m og n slik at $mA + nB = 1$. Multipliseres dette med d får vi $ma + nb = d$.

Euklids algoritme gir en metode for å finne største felles faktor til to naturlige tall. Vi utfører prosessen i Teorem 3 helt til den stopper opp. Da er den siste resten r_n (ulik 0) lik største felles multiplum.

Oppgave 25 *Finn største felles faktor til*

$$1)\ 148\ og\ 328\quad 2)\ 1725\ og\ 2184\quad 3)\ 13920\ og\ 15457\quad 4)\ 360360\ og\ 1324785.$$

Oppgave 26 *Faktoriser følgende tall som et produkt av primtall:*

1) 328 2) 341 3) 2184 4) 13920 5) 360360.

Oppgave 27 *Vis at produktet av det minste felles multiplum og den største felles faktor til a og b er lik ab.*

Oppgave 28 *Vis påstanden: Hvis n er et oddetall, da er $x^n - x$ delelig med 6 for alle heltall x.*

Oppgave 29 *La $f_n = 2^{2^n} + 1$ for naturlige tall n. Vis at f_n og f_m er relativt primiske når $m \neq n$.*

Oppgave 30 *Faktoriser de første 100 naturlige tallene som produkter av primtall.*

7 Titallsystemet og andre tallsystem

Gitt et ikke-negativt heltall n. Fra divisjonsteoremet (2) finnes det et tall r_1 mellom 0 og 9 og et ikke-negativt heltall n_1 slik at $n = 10n_1 + r_0$. Vi gjentar prosedyren med n_1. Ved å gjenta dette til prosessen stopper opp får vi at

$$n = r_0 + r_1 10 + r_2 10^2 + \cdots + r_n 10^n$$

hvor $0 \leq r_0, r_1, \ldots, r_n \leq 9$. Vi skriver tallet som $r_n r_{n-1} \ldots r_1 r_0$. Dette må ikke forveksles med produktet av r_i-ene. For eksempel er 1248 lik $1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8$. Tallet r_i kalles det $(i+1)$-te sifferet. Så 8 er første siffer og 2 er tredje siffer i 1248. Fordelen med denne måten å presentere tall på er at det bare bruker et begrenset antall symboler. I dette tilfellet 10 ulike symboler, heltallene fra 0 til 9. Addisjon av tall presentert i titallsystemet reduseres til addisjon av tall fra 1 til 9, multiplikasjon reduseres til multiplikasjon av tall fra 1 til 9 og til addisjon.

Alle naturlige tall større eller lik 2 kan brukes til å lage et tallsystem tilsvarende det vi har for 10. Totallsystemet presenterer et tall som en sum $a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \cdots + a_n 2^n$, hvor hver a_i er 0 eller 1, for $i = 0, \ldots n$. De første 10 ikke-negative heltallene i 2-tallsystemet er

$$0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001.$$

I dette tilfellet er det bare to symboler, og addisjon og multiplikasjon av dem er svært enkel, men det kreves flere operasjoner enn ved bruk av 10-tallsystemet. Totallsystemet brukes av datamaskiner. Der vil typisk to tilstander representeres av høy spenning eller lav spenning (for eksempel, spenning over 3 Volt som høy og under 1 Volt som lav). Tallsystem basert på potenser av 2, som 8 og 16-tallsystemene, er i blant nyttige. I 16 tallsystemet er det vanlig å bruke følgende symboler

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15.$$

Eksempel. En byte består av 8 biter (i ordnet rekkefølge). En bit kan ha to ulike verdier for eksempel 0 og 1 eller SANN og FALSK. En byte kan derfor ha $2^8 = 16^2 = 256$ ulike verdier. Skal vi bruke 10-tallsystemet for å oppgi verdiene må vi bruke 3 siffer.

I 2-tallsystemet må vi bruke 8 siffer. I 16-tallsystemet trenger vi bare 2 siffer. For eksempel er FF $= 15 \cdot 16 + 15 = 255$, 8 C $=8 \cdot 16 + 12 = 140$.

Farger på lys oppgis ofte som kombinasjoner av ulike styrker av grunnfargene Rød, Grønn, og Blå (RGB). Det er ofte tilstrekkelig å bruke en 8 biters oppløsning for hver av fargene. Dette gir $(2^8)^3 = 2^{24} = 16777216$ ulike kombinasjoner. Det er vanlig å bruke 16-tallsystemet. Fargen 00,00,00 er hvit, mens FF, 00, 00 er ren rød. Gul er gitt ved FF, FF, 00. Gråtoner er farger hvor det er like mye rød, grønn og blå.

Det er vanlig å forklare dominansen til 10-tallsystemet med det faktum at menneskene har 10 fingrer. I blant har 20-tallsystemet vært i bruk. Det er forklart med at både fingre og tær ble brukt ved telling. I dansk er 50, 60, 70, 80 og 90 telt opp i enheter av 20. De sier henholdsvis, halvtreds $(2{,}5 \cdot 20)$, tres, halvfjerds, firs, og halvfems. I fransk henger også dette igjen. De teller tallene mellom 61 og 79 som 60 pluss et tall mellom 1 og 19. Tallet 80 kalles "fire-tjue" (quatre-vingt) og opp til 99 telles tallene ved å legge til et tall mellom 1 og 19.

Addisjon av tall i titallsystemet skjer ved at vi legger sammen tallene som svarer til hver potens av 10. Vi starter med laveste potens av 10. Hvis summen overstiger 9 skriver vi den som $10 \cdot m$ pluss en rest mellom 0 og 9. Vi sier vi har m i **mente**. Dette legges til summen av tallene som svarer til en høyere potens av 10. (Vi kan ikke få mer en 1 i mente når to tall legges sammen, siden vi har maksimalt 18 pluss 1 i mente som er $19 = 10 + 9$.)

Eksempel på addisjon $13+19 = 10+10+(3+9) = 2 \cdot 10+(10+2) = 3 \cdot 10+2 = 32$. $55+947 = 9 \cdot 10^2+(5+4) \cdot 10+5+7 = 9 \cdot 10^2+(5+4+1) \cdot 10+2 = (9+1) \cdot 10^2+(0) \cdot 10+2 = 1002$.

Det er forskjellige teknikker og skrivemåter i bruk for å klare å utføre slike operasjoner raskt og korrekt.

Oppgave 31 *La r være lik desimaltallet $r_n \dots r_0 = r_n 10^n + \cdots + r_1 10 + r_0$. Vis at r er et partall hvis og bare hvis sifferet r_0, lengst til høyre, er 0, 2, 4, 6 eller 8. Vis at r er delelig med 5 hvis og bare hvis r_0 er 0 eller 5.*

Oppgave 32 *Vis at et desimaltall $r_n \dots r_0 = r_n 10^n + \cdots + r_1 10 + r_0$ er delelig med 3 hvis og bare hvis summen $r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n$ er delelig med 3. Vis også at tallet er delelig med 9 hvis og bare hvis $r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n$ er delelig med 9.*

Oppgave 33 *Vis at et desimaltall $r_n \dots r_0 = r_n 10^n + \cdots + r_1 10 + r_0$ er delelig med 11 hvis og bare hvis den alternerende summen $r_0 - r_1 + r_2 - r_3 + \cdots + (-1)^n r_n$ er delelig med 11.*

Oppgave 34 *Anta m er et heltall som ikke er delelig med 2 eller 5. Vis at for alle naturlige tall r_0 slik at $0 \leq r_0 \leq 9$, så finnes det et desimaltall $r_n \dots r_0$ som er delelig med m. Finn de minste naturlige tallene med denne egenskapen for $m = 3$.*