15 mars 2012

18.5 Addisjonsformelen

A, B hendelser.

(1) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Eks Kaster to terninger, blå og rød.

Utfallsrommet $\{(m,n) \quad 1 \le m,n \le 6\}$

36 forskjellige utfall.

Uniform sannsynlighetsmodell $P(m,n) = \frac{1}{36}$

Sannsynlighet for å få m og n (uordnet)

er $\begin{cases} \frac{1}{36} & \text{når } n = m \quad (\text{utfallet } (n,n)) \\ \frac{2}{36} = \frac{1}{18} & \text{når } n \neq m \quad (\text{utfallene } (n,m) \text{ og } (m,n)) \end{cases}$

Sannsynligheten for å få to 2-ere er $\frac{1}{36}$

—— " —— 5 og 2 er $\frac{1}{18}$.

H_1 = Rød terning gir 5.

antall elementer i H_1 er 6

Så $P(H_1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

H_2 = Blå terning gir 5.

$P(H_2) = \frac{1}{6}$.

H_3 = Begge terningene gir 5. $= \{(5,5)\}$

$P(H_3) = \frac{1}{36}$

H_4 = Minst en av terningene gir 5.

(2) $= H_1 \cup H_2$

$H_1 \cap H_2 = H_3$

$$P(H_4) = P(H_1 \cup H_2)$$
$$= P(H_1) + P(H_2) - P(H_1 \cap H_2)$$
$$= \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36}$$
$$= \underline{\underline{\frac{11}{36}}}$$

H_5 = Akkurat en av terningene er 5.

$= H_4 \setminus H_3$ $\quad (H_3 \subset H_4)$

H_5 og H_3 disjunkte med union H_4

$$P(H_5) + P(H_3) = P(H_4)$$
$$P(H_5) = P(H_4) - P(H_3)$$
$$= \frac{11}{36} - \frac{1}{36} = \frac{10}{36} = \underline{\underline{\frac{5}{18}}}$$

3

Eksempel

LØSNINGSFORSLAG MATEMATIKK 202

Oppgave 1 (20 %)

Et vareparti består av 50 enheter hvor to typer feil kan forekomme. Av de 50 enhetene i varepartiet har 4 enheter feil av type A, 7 enheter har feil av type B og 41 enheter er feilfrie.

a) Hvor mange enheter har både feil A og feil B?

b) En enhet velges tilfeldig ut fra varepartiet. Hva er sannsynligheten for at denne enheten har feil B men ikke feil A?

c) Hvis den utvalgte enheten har feil A, hva er sannsynligheten for at den også har feil B?

LF: Det er 9 av enhetene som har minst en feil. Så antallet som har både feil A og B er

$$\sharp(A) + \sharp(B) - \sharp(A \cup B) = \sharp(A \cap B) = 11 - 9 = 2.$$

Antall som har feil B men ikke feil A er $\sharp(B) - \sharp(A \cap B) = 7 - 2 = 5$. Sannsynligheten for å ha feil B men ikke feil A er altså

$$\frac{5}{50} = 10\%.$$

Den betinga sannsynligheten for at en enhet har feil B hvis den har feil A er

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/50}{4/50} = 0.5 = 50\%.$$

Oppgave 2 (20 %)

En stokastisk variabel har en verdimengde som er $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Vi kjenner sannsynligheten for at X tar verdiene $0, 1, 2$ og 3:

$$P(X = 0) = 0.30$$
$$P(X = 1) = 0.20$$
$$P(X = 2) = 0.10$$
$$P(X = 3) = 0.00$$

a) Hva er sannsynlighetsfordelingen til X?

Date: 2.november 2008.

④

18.6 Betinga sannsynlighet.

A, B hendelser.

Den betinga sannsynligheten for A gitt B

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

$$P(B) \cdot P(A \mid B) = P(A \cap B).$$

To hendinger A og B er uavhengige

hvis $P(A) = P(A \mid B)$

$$\iff P(B) \cdot P(A) = P(A \cap B).$$

$$\iff P(B \mid A) = P(B).$$

Eksempel (5) Vi kaster en rød og en blå terning.

H_1 : Rød terning gir 5

H_2 : Blå terning gir 3

H_3 : Begge terningene gir samme verdi

$H_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

H_4 : Summen av terningverdiene er 10.

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{6}$$

$$P(H_3) = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall utfall}} = \frac{6}{36} = \underline{\frac{1}{6}}$$

$H_1 \cap H_2$: Rød terning er 5 og blå terning er 3.

$$P(H_1 \cap H_2) = \frac{1}{36}$$
$$= P(H_1)\, P(H_2)$$

H_1 og H_2 er uavhengige hendinger.

Er hendingene H_1 og H_3 uavhengige? ja

$H_1 \cap H_3 = \{(5,5)\}$

$P(H_1 \cap H_3) = \frac{1}{36}$.

$P(H_1) = \frac{1}{6} = P(H_3)$

Derfor $\underline{P(H_1 \cap H_3) = P(H_1) \cdot P(H_3)}$.

(6) Er hendingene H_3 og H_4 uavhengige? Nei

$H_4 = \{(6,4), (5,5), (4,6)\}$ 3 utfall.

$P(H_4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

$(H_3 \cap H_4) = \{(5,5)\}$.

$P(H_3 \cap H_4) = \frac{1}{36}$

$$P(H_4 \mid H_3) = \frac{P(H_3 \cap H_4)}{P(H_3)} = \frac{1/36}{1/6} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

$$P(H_4) = \frac{1}{12} \neq P(H_4 \mid H_3)$$

H_3 og H_4 er avhengige hendelser.

7

oppgave 4 eksamen juni 2011

a) H_1 : Vinner på alle tre loddene.

$$P(H_1) = \frac{5}{50} \cdot \frac{4}{49} \cdot \frac{3}{48} = \frac{1}{1960}$$

b) H_2 : Vinner på ingen av de tre loddene

H_3 : Vinner på minst en av loddene.

$H_2 \cap H_3 = \emptyset$ H_2 og H_3 er disjunkte

$H_2 \cup H_3$ = hele utfallsrommet

$$P(H_2) = \frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{43}{48} = \frac{1419}{1960}$$

$$P(H_3) = 1 - P(H_2) = \frac{541}{1960}$$