23 jan.
2012

9.7 Sammensatte funksjoner
Kjerneregelen

1

f, u to funksjoner

ytre funksjon $f(u(x))$ sammensatt funksjon

indre funksjon eller kjerne

"først u så f"

$f(x) = x^3$ $\quad u(x) = 1 + x^2$.

Sammensettingen: $f(u(x)) = f(1+x^2) = \underline{(1+x^2)^3}$

$$u(f(x)) = u(x^3) = 1 + (x^3)^2 = \underline{1 + x^6}$$

Alternativ notasjon
$$f(u(x)) = f \circ u\,(x)$$
ring (sirkel), ikke en prikk.

Definisjonsmengden til $f \circ u$ består av alle x i def. mengden til u, slik at $u(x)$ er i def. mengden til f.

② Skriv * $\sin(x^3)$ som en sammensatt funksjon av to "enklere" funksjoner.

$U(x) = x^3$ $\qquad$ $f(x) = \sin x$

$\sin(x^3) = f(u(x))$

* $\frac{1}{1+x^2}$

$U(x) = 1+x^2$ $\qquad$ $f(u) = \frac{1}{u}$

$\underline{\frac{1}{1+x^2} = f(u(x))}$.

—

$f(x) = \cos(x^2)$ $\qquad$ $g(x) = x^{-2}$

$h(x) = 2x+3$.

$$f(g(h(x))) = f\left(\frac{1}{(2x+3)^2}\right)$$
$$= \cos\left(\left(\frac{1}{(2x+3)^2}\right)^2\right)$$
$$= \cos\left(\frac{1}{(2x+3)^4}\right)$$

—

$f(x) = 2x+3$ $\qquad$ $g(x) = -5x+1$

$$f(g(x)) = 2g(x)+3 = 2(-5x+1)+3$$
$$= -10x+2+3$$
$$= \underline{-10x+5}.$$

To linjer $f(x) = a_1 x + b_1$

(3) $g(x) = a_2 x + b_2$

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= a_1 g(x) + b_1 \\ &= a_1(a_2 x + b_2) + b_1 \\ &= a_1 \cdot a_2 \cdot x \quad + (a_1 \cdot b_2 + b_1) \end{aligned}$$

Den sammensatte av to linjer er en ny linje med stigningstall produktet av stigningstallet til de to linjene.

Kjerneregelen

$$(f \circ u(x))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

Eks: $$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-1}{(1+x^2)^2} \cdot (1+x^2)'$$

$$= \frac{-1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = \underline{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}$$

mer detaljert: $\frac{1}{1+x^2} = f(u(x))$

$u(x) = 1+x^2$ $\qquad u'(x) = 2x$

$f(x) = x^{-1}.$ $\qquad f'(x) = (-1)x^{-1-1}$

$= \frac{-1}{x^2}.$

Kjerneregelen

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = (f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

$$= \frac{-1}{(u(x))^2} \cdot (2x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Oppg. Deriver $(1+x^3)^4$ med hensyn til x.

(4) $U(x) = 1 + x^3$ kjerne $U' = 3x^2$

$f(x) = x^4$ ytre funksjon $f'(x) = 4x^3$

$f(u(x)) = (1+x^3)^4$

$$\left((1+x^3)^4\right)' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$
$$= 4(u(x))^3 \cdot 3x^2$$
$$= 4(1+x^3)^3 \cdot 3x^2$$
$$= \underline{12x^2(1+x^3)^3}.$$

Deriver $(1+3x)^5$

$$\left((1+3x)^5\right)' = 5(1+3x)^4 \, (1+3x)'$$
$$= 5(1+3x)^4 \cdot 3$$
$$= \underline{15(1+3x)^4}.$$

Deriver $\sqrt{1-x^3}$.

Hint $\sqrt{u} = u^{1/2}$.

(5)

$$\left(\sqrt{1-x^3}\right)' = \left(u^{1/2}\right)' \cdot \left(u(x)\right)'$$

$$= \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} \cdot \left(1-x^3\right)'$$

$$= \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-3x^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \left(-3x^2\right)$$

$$= \underline{\frac{-3x^2}{2 \cdot \sqrt{1-x^3}}}$$

Deriver $\sqrt{1+5\sqrt{x}}$

Kjerne $u(x) = 1+5\sqrt{x} = 1+5 \cdot x^{1/2}$, $u'(x) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}$

ytre funksjon $f(x) = \sqrt{u} = u^{1/2}$, $f'(u) = \frac{1}{2} \cdot u^{-1/2}$

$$\left(\sqrt{1+5\sqrt{x}}\right)' = \left(f(u(x))\right)' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+5\sqrt{x}\right)^{-1/2} \cdot \frac{5}{2} \cdot x^{-1/2}$$

$$= \underline{\frac{5}{4\sqrt{1+5\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}}}.$$

(6)

Eks. Deriver $\sqrt{3+\sqrt{1+5\sqrt{x}}}$.

$g(v) = v^{1/2}$

$v(x) = 3+\sqrt{1+5\sqrt{x}} = 3 + f(u(x))$

$(g(v(x)))' = (g(3+f(u(x))))'$

$= g'(3+f(u(x))) \cdot (3+f(u(x)))'$

$= \frac{1}{2\sqrt{v(x)}} \cdot (0 + (f(u(x)))')$

$= \underline{\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{1+5\sqrt{x}}}} \cdot \frac{5}{4\sqrt{1+5\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}}}$.

Eks $f(x) = x^r,\ f'(x) = r \cdot x^{r-1},\ g(x) = x^s,\ g' = s \cdot x^{s-1}$

$f(g(x)) = f(x^s) = (x^s)^r = x^{s \cdot r}$

$(f \circ g(x))' = (x^{s \cdot r}) = s \cdot r \cdot x^{s \cdot r - 1}$

Med bruk av kjerneregelen:

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$= r \cdot (g(x))^{r-1} \cdot s \cdot x^{s-1}$

$= r(x^s)^{r-1} \cdot s \cdot x^{s-1}$

$= r \cdot s \cdot x^{s(r-1)} \cdot x^{s-1}$

$= r \cdot s \cdot x^{s \cdot r - s + s - 1}$

$= \underline{r \cdot s\ x^{s \cdot r - 1}}$.

Derivasjonsregelen

7 $$\left(f(ax+b)\right)' = a \cdot f'(ax+b)$$

følger fra kjerne regelen.

(ytre funksjon f, kjerne $u(x) = ax+b$
$u' = a$.)

$$\left(\sqrt{2x+3}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2x+3}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}.$$

Kjerneregelen med Leibniz notasjon

$$\frac{df(u(x))}{dx} = \frac{df}{du}(u(x)) \cdot \frac{du(x)}{d(x}.$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{13.7} = f(u(x))$$

$U(x) = x + \frac{1}{x}$

$f(u) = u^{13,7}$

$$\frac{d}{dx}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{13.7} = \frac{d}{dx} f(u(x)) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d\,u^{13.7}}{du} \cdot \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{dx} = \left(13{,}7 \cdot u^{12{,}7}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \underline{13{,}7\left(x+\frac{1}{x}\right)^{12{,}7}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}.$$