Drill - Implisitt derivasjon

Introduksjon

Til nå har vi sett på kurver som er grafen til en funksjon på den *eksplisitte* formen $y = f(x)$. Andre ganger kan kurven være gitt *implisitt* ved en ligning $F(x, y) = 0$. Ofte er det ikke mulig å løse denne ligningen med hensyn på y, men vi kan likevel ha behov for å regne ut y', blant annet for å finne tangenter.

Implisitt derivasjon

Implisitt derivasjon er en metode for å finne y' for en kurve beskrevet implisitt, det vil si ved hjelp av en likning $F(x, y) = 0$. Vi utfører implisitt derivasjon ved å derivere likningen. Vi tenker da at $y = y(x)$ er en funksjon av variabelen x og bruker derfor kjerneregelen med kjerne $y = y(x)$ når vi deriverer uttrykk som involverer y.

Etter at likningen $F(x, y) = 0$ er derivert, vil vi få en likning i variablene x, y, y', og vi løser denne likningen for y'. Vi vil da få et uttrykk for y', og dette uttrykket involverer vanligvis både x og y.

Eksempel

Vi ser på likningen for en sirkel i planet med radius 1 og sentrum i origo,

$$x^2 + y^2 = 1$$

Dersom vi prøver å løse ligningen med hensyn på y, får vi et problem fordi

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2} \qquad (\text{for } -1 \leq x \leq 1)$$

Samme x-verdi gir to y-verdier. Vi kan ikke finne et eksplisitt uttrykk for y. Vi skal likevel prøve å finne et uttrykk for y'.

Vanskeligheten ligger i å derivere uttrykket y^2 med hensyn på x. Vi bruker kjernereglen med

$$\begin{aligned} \text{Ytre funksjon:} &\quad f(y) = y^2 \quad \text{med} \quad f'(y) = 2y \\ \text{Indre funksjon:} &\quad y = y(x) \quad \text{med derivert} \quad y' = y'(x) \\ \text{Derivert:} &\quad (y^2)' = f'(y) \cdot y' = 2y \cdot y' \end{aligned}$$

Dermed kan vi derivere likningen $x^2 + y^2 = 1$ implisitt:

$$(x^2 + y^2)' = (1)' \quad \Rightarrow \quad (x^2)' + (y^2)' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y \cdot y' = 0$$

Til slutt løser vi den siste likningen for y', og vi får da at

$$y' = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Legg merke til at uttrykket for y' inneholder både x og y og at det ikke er definert for $y = 0$ (pga. null i nevner). Vi ser fra likningen $x^2 + y^2 = 1$ at $y = 0$ svarer til $x = \pm 1$. Dette er punktene på sirkelen der tangenten er vertikal.

Oppgave 1

Bruk implisitt derivasjon til å finne y' for disse kurvene:

a) $x^2 + y^2 = 25$

b) $4x^2 + 9y^2 = 1$

c) $xy - x^3 = 0$

d) $y^4 + 2x^2y - 3xy^2 = 1$

e) $y^{3/2} + x^{3/2} = 2\sqrt{2}$

Tangenter til kurver som er implisitt definert

Når vi kjenner den deriverte y' som en funksjon av x og y, kan vi finne tangenten til kurven i et gitt punkt (x_0, y_0). Til dette bruker vi ettpunktsformelen

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

på tilsvarende måte som når vi skal finne tangenten til en graf $y = f(x)$ i et gitt punkt $x = x_0$. Når kurven er definert implisitt, så bruker vi stigningstallet $a = y'(x_0, y_0)$.

Eksempel

Vi ser på punktet $(x_0, y_0) = (1/2, \sqrt{3}/2)$ på sirkelen med radius 1 og sentrum i origo, definert implisitt ved likningen $x^2 + y^2 = 1$.

Vi begynner med å sjekke at det oppgitte punktet faktisk ligger på sirkelen med radius 1 med sentrum i origo. Da må vi se om punktet passer inn i likningen $x^2 + y^2 = 1$ ved å sette inn de oppgitte tallene:

$$\text{VS } = x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 = \text{ HS.}$$

Vi ser at dette stemmer, og dermed ligger punktet $(1/2, \sqrt{3}/2)$ på sirkelen.

For å finne tangentlinjen, bruker vi ettpunktsformelen $y - y_0 = a(x - x_0)$. Vi trenger stigningstallet $a = y'(x_0, y_0)$, og regner derfor ut dette først:

$$a = y'(x_0, y_0) = -\frac{x_0}{y_0} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Ettpunktsformelen $y - y_0 = a(x - x_0)$ gir nå ved innsetting

$$y - \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}(x - \frac{1}{2}) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\,x + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Oppgave 2

Finn likningen for tangenten til disse kurvene i de oppgitte punktene. Begynn med å sjekke at punktene ligger på kurven i hvert tilfelle.

a) $x^2 + y^2 = 25$, $(x_0, y_0) = (3, -4)$.

b) $4x^2 + 9y^2 = 1$, $(x_0, y_0) = (0, 1/3)$.

c) $xy - x^3 = 0$, $(x_0, y_0) = (-2, 4)$.

d) $y^4 + 2x^2y - 3xy^2 = 1$, $(x_0, y_0) = (1, -2,052)$.

e) $y^{3/2} + x^{3/2} = 2\sqrt{2}$, $(x_0, y_0) = (2, 0)$.