Drill - Implisitt derivasjon

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) $x^2 + y^2 = 25$ gir $2x + 2y\,y' = 0$ ved implisitt derivasjon, og dermed er y' gitt ved

$$y' = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

b) $4x^2 + 9y^2 = 1$ gir $8x + 18y\,y' = 0$ ved implisitt derivasjon, og dermed er y' gitt ved

$$y' = \frac{-8x}{18y} = -\frac{4x}{9y}$$

c) Vi bruker produktregelen for å derivere likningen $xy - x^3 = 0$, og får $1 \cdot y + x \cdot y' - 3x^2 = 0$. Dermed er y' gitt ved

$$y' = \frac{3x^2 - y}{x}$$

d) Vi bruker produktregelen for å derivere likningen $y^4 + 2x^2y - 3xy^2 = 1$, og får

$$4y^3\,y' + (4x \cdot y + 2x^2 \cdot y') - (3 \cdot y^2 + 3x \cdot 2y\,y') = 0$$

Dermed er y' gitt ved

$$y' = \frac{-4xy + 3y^2}{2x^2 - 6xy + 4y^3}$$

e) $y^{3/2} + x^{3/2} = 2\sqrt{2}$ gir $3/2\;y^{1/2}\,y' + 3/2\;x^{1/2} = 0$ ved implisitt derivasjon, og dermed er y' gitt ved

$$y' = \frac{-3/2\;x^{1/2}}{3/2\;y^{1/2}} = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

Oppgave 2

a) Vi bruker uttrykket for y' som vi regnet ut ovenfor, og ser at

$$y' = -\frac{x_0}{y_0} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

Dermed er likningen til tangenten gitt ved

$$y - (-4) = \frac{3}{4}(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{4}\,x - \frac{25}{4}$$

b) Vi bruker uttrykket for y' som vi regnet ut ovenfor, og ser at

$$y' = -\frac{4x_0}{9y_0} = -\frac{4 \cdot 0}{9 \cdot 1/3} = 0$$

Dermed er likningen til tangenten gitt ved

$$y - \frac{1}{3} = 0(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}$$

c) Vi bruker uttrykket for y' som vi regnet ut ovenfor, og ser at

$$y' = \frac{3x_0^2 - y_0}{x_0} = \frac{3 \cdot (-2)^2 - 4}{-2} = -4$$

Dermed er likningen til tangenten gitt ved

$$y - 4 = -4(x - (-2)) \quad \Rightarrow \quad y = -4x - 4$$

d) Vi bruker uttrykket for y' som vi regnet ut ovenfor, og ser at

$$y' = \frac{-4x_0y_0 + 3y_0^2}{2x_0^2 - 6x_0y_0 + 4y_0^3} \approx -1.029$$

Dermed er likningen til tangenten gitt ved

$$y - (-2.052) = -1.029(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -1.029x - 1.023$$

e) Vi bruker uttrykket for y' som vi regnet ut ovenfor, og ser at

$$y' = -\frac{\sqrt{x_0}}{\sqrt{y_0}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{0}}$$

Dette uttrykket er udefinert, og det betyr at kurven har en vertikal tangent i punktet $(2, 0)$. Dermed er likningen til tangenten gitt ved

$$x = 2$$