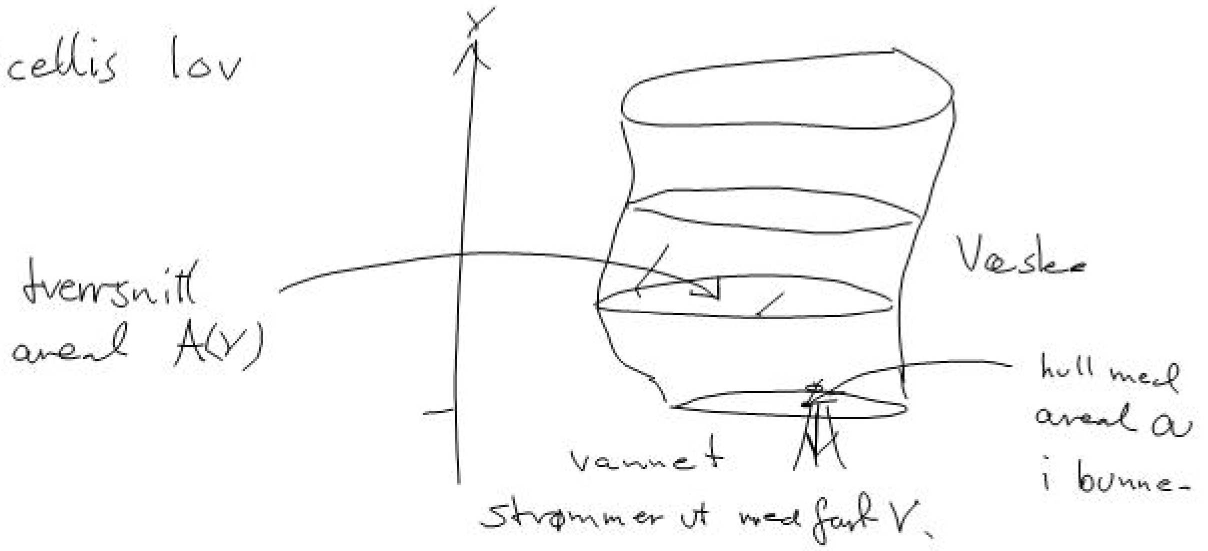
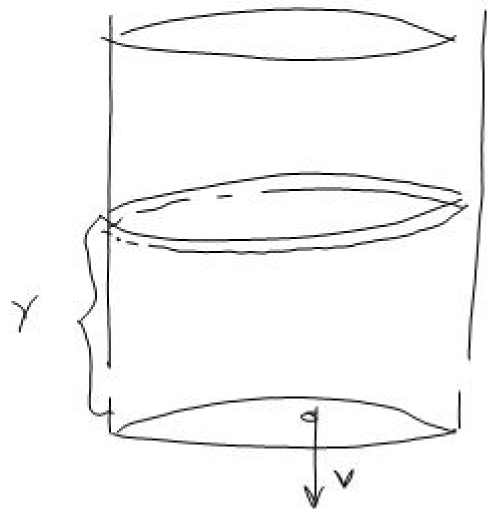
Bruk av diff. likninger

Torricellis lov



Antar $A(y) \gg a$ ($A(y)$ er mye større enn a)



Δm masse til en liten mengde væske som renner ut (Δy veldig liten)

Endring i potensiell energi = kinetisk energi til væsken som renner ut

$$g \cdot \cancel{\Delta m} \cdot y = \frac{1}{2} \cancel{\Delta m} \cdot v^2$$

$g = 9.81 \, m/s^2$

$$2 \cdot g \cdot y = v^2$$

$$\underline{v = \sqrt{2g \cdot y}}$$

Endring av volum per tidsenhet

(væske som renner ut per tidsenhet)

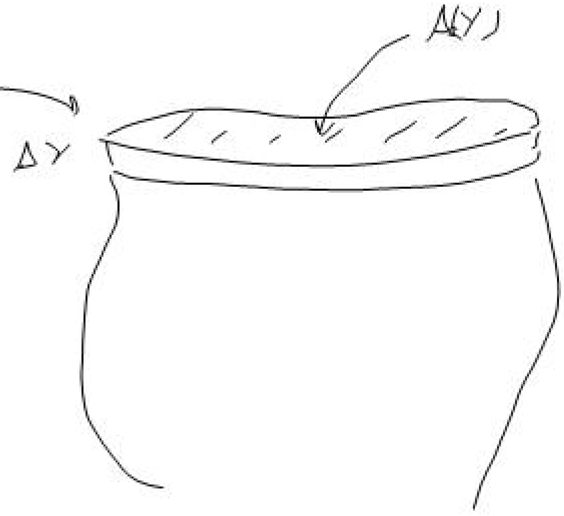
V volum

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = V'$$

$$= aV = a\sqrt{2gy}$$

(y avtar)

Dette er lik $\quad - y' \cdot A(y)$



$$-\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta y \cdot A(y)}{\Delta t}$$

$$-V' = y' \cdot A(y)$$

$$a \cdot V = a\sqrt{2 \cdot g \cdot y}$$

$$= -A(y) \cdot y'$$

$$y' = \frac{-a\sqrt{2gy}}{A(y)}$$

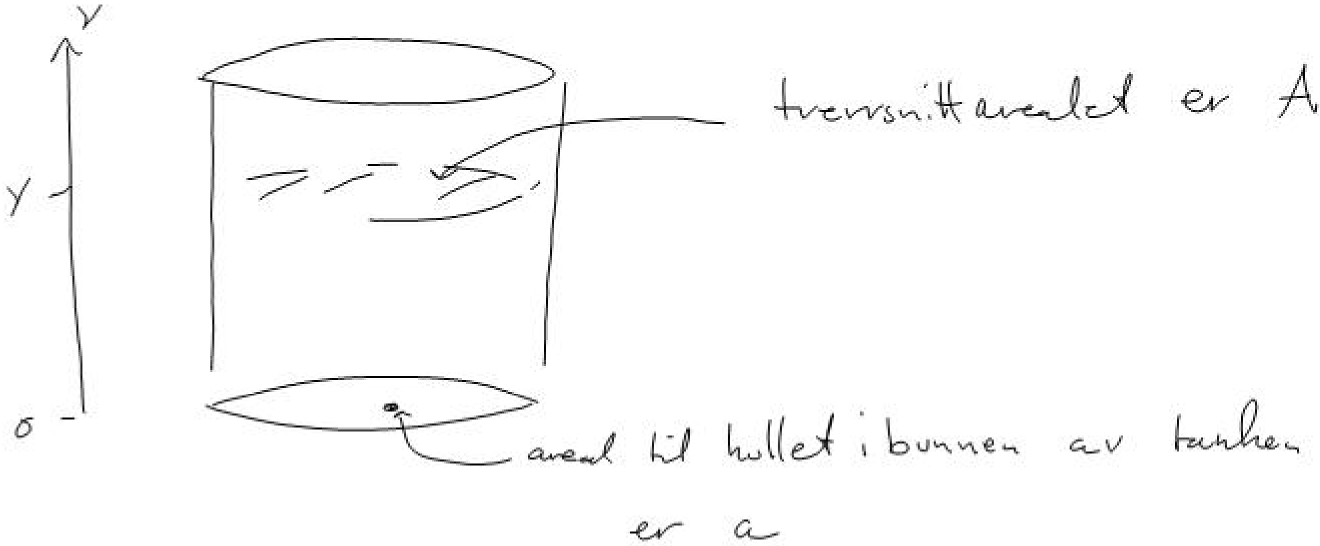
separabel diff. likning.

$$\frac{A(y)}{\sqrt{y}} y' = -a\sqrt{2g}$$

(separert)

Differensiallikningen beskriver hvordan høyden fra bunnen til væskeoverflaten endrer seg med tiden

Vi løser diff. likningen for en sylindrisk tank. Randbetingelsen er $Y(0) = Y_0$ (høyden til væskenivået fra bunnen ved tiden $t=0$ er Y_0).



$$\int \frac{Y'}{\sqrt{Y}}\,dt = \int -\frac{a}{A}\sqrt{2g}\,dt$$

$$\int \frac{dY}{Y^{1/2}} = -\frac{a}{A}\sqrt{2g}\cdot t + C$$

$$= 2\cdot Y^{1/2} = C - \frac{a}{A}\sqrt{2g}\,t$$

$$Y = \left(\frac{C}{2} - \frac{a}{2A}\sqrt{2g}\,t\right)^2 .$$

$Y(0) = Y_0$ randbetingelsen.

Så $\frac{C}{2} = \sqrt{Y_0}$

$$\underline{Y(t) = \left(\sqrt{Y_0} - \frac{a}{2A}\sqrt{2g}\cdot t\right)^2}$$

gyldig fra $t=0$ til $t = \dfrac{2A\sqrt{Y_0}}{a\sqrt{2g}}$ (tanken er da tom.)

Hvordan må tverrsnittarealet avhenge av høyden til vasknivået y for at y' skal være konstant?

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{A(y)} \left(-a\sqrt{2g} \right)$$

Så y' er konst (uavhengig av y)

hvis $A(y) = \sqrt{y} \cdot \text{konst} = \sqrt{y} \cdot k$

Tegn en tank med denne egenskapen!