Mandag 23 mars 09 Ubestemte integral

En antiderivert til en funksjon $f(x)$ er en funksjon $F(x)$ slik at

$$F'(x) = f(x)$$

<u>Eks</u> - $F(x) = x^2$ er en antiderivert til $f(x) = 2x$

$$F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$$

- $\sin x$ er en antiderivert til $\cos x$

$$(\sin x)' = \cos x$$

- $\ln|x|$ er en antiderivert til $\frac{1}{x}$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

- x^2, $x^2 - 13$, $x^2 + 1$ er alle sammen antideriverte til $2x$.

La $f(x) \equiv 0$ (funksjonen som er 0 for alle x)

En antiderivert $F(x)$ til $f(x)$ må tilfredstille:

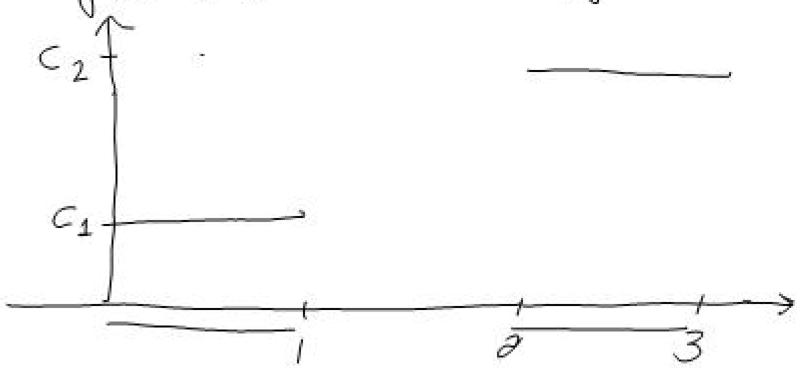
$$F'(x) = 0 \ (= f(x)) \text{ for alle } x.$$

Derfor må $F(x)$ være en konstant funksjon.

$$F(x) = c \text{ for en konstant } c.$$

Hvis definisjonsmengden til
$f(x) \equiv 0$ ikke er sammenhengende kan
en antiderivert $F(x)$ være mer komplisert enn
en konstant funksjon.

$f(x) \equiv 0$ $D_f = [0,1] \cup [2,3]$



eksempel på en $F(x)$
antiderivert til $f(x), D_f$.

Hvis $F(x)$ og $G(x)$ er antideriverte til
$f(x)$ og D_f er sammenhengende, da er
$F(x) = G(x) + c$ hvor c er en konstant.

$(F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$ for $x \in D_f$

så $F - G$ er en antiderivert til
funksjonen som er identisk lik 0.
Derfor er $F - G = c$, en konstant.

"Antiderivert er bestemt opp til å addere en konstant"

Notasjon $\int f(x)\,dx$ er familien av antiderivete til $f(x)$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

hvor $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$

og c er en konstant.

$\int f(x)\,dx$ kalles et ubestemt integral (det ubestemte integralet til $f(x)$).

Egenskaper til ubestemte integral

Integralet er lineært:

1) $$\int \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

2) $$\int a \cdot f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx \quad , a \neq 0$$

(syner del 2)

La $F(x)$ være en antiderivert til $f(x)$

$$F'(x) = f(x)$$

$$(a F(x))' = a(F(x))' = a \cdot f(x)$$

så $a \cdot F(x)$ er en antiderivert til $a \cdot f(x)$

$$\int a f(x)\, dx = aF(x) + C$$

$$a\int f(x)\,dx = a\left(F(x) + c_1\right)$$

$$= a\cdot F(x) + a\cdot c_1$$

når $a \neq 0$ så gjennomløper $a\cdot c_1$ alle reelle tall når c_1 gjennomløper alle reelle tall

$(C = a\cdot c_1)$

så $$\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

$$\int 2x^4 + 3\,dx = \int 2x^4\,dx + \int 3\,dx$$

$$= 2\int x^4\,dx + 3\int 1\,dx$$

$$= 2\left(\frac{x^5}{5} + c_1\right) + 3\left(x + c_2\right)$$

$$= \frac{2}{5}x^5 + 3x + \underbrace{(2c_1 + 3c_2)}_{C}$$

$$\int 2x^4 + 3\,dx = \frac{2}{5}x^5 + 3x + C$$

Vi har tidligere sett at

$$\frac{d\, s(t)}{dt} = v(t)$$

$s(t)$ posisjon $v(t)$ fart

så $\int v(t)\, dt = s(t) + C$

For å bestemme posisjonen ved et tidspunkt t er det ikke nok å kjenne farten i alle tidspunkt, vi må også kjenne posisjonen for et gitt tidspunkt t_0.

$$\int x^r \, dx = \begin{cases} \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c & r \neq -1 \\ \ln|x| + c & r = -1 \end{cases}$$

$$\int e^{k \cdot x} \, dx = \frac{1}{k} e^{k \cdot x} + c \qquad k \neq 0$$

$$\int \cos(k \cdot x) \, dx = \frac{1}{k} \sin(k x) + c \qquad k \neq 0$$

$$\int \sin(kx) \, dx = \frac{-1}{k} \cos(kx) + c \qquad k \neq 0$$

$$\int \ln|x| \, dx = x \ln|x| - x + c$$

ehs

$$\int a^x \, dx = \int e^{\ln a \cdot x} \, dx$$

$$= \frac{1}{\ln a} (e^{\ln a})^x + c = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin(2\pi \cdot x) \, dx = \frac{-1}{2\pi} \cos(2\pi x) + c$$

$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{1/2+1}}{1+1/2} + c$$

$$= \frac{x^{3/2}}{3/2} + c$$

$$= \frac{2 \cdot x \cdot \sqrt{x}}{3} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-1/2}\,dx$$

$$= \frac{x^{-1/2+1}}{1-1/2} + c = \frac{x^{1/2}}{1/2} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \underline{2\sqrt{x} + c}$$

$$\int \ln 5|x|\,dx = \int \ln 5 + \ln|x|\,dx$$

$$= \int \ln 5\,dx + \int \ln|x|\,dx$$

$$= \underline{(\ln 5)\cdot x + x\ln|x| - x + c}$$

Anta $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$.

$$F'(x) = f(x).$$

$$F(u(x))' \underset{\text{Kjerneregelen}}{=} F'(u(x))\cdot u'(x)$$

$$= f(u(x))\cdot u'(x)$$

Så $F(u(x))$ er en antiderivert til $f(u(x))\cdot u'(x)$.

substitusjon

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = F(u(x)) + c$$

$$= \int f(u)\,du$$

La $u(x) = ax + b$

$u'(x) = a$

Hvis $F'(x) = f(x)$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

$$= \frac{1}{a} \int f(u)\,du$$

hvor $u = ax + b$.

$$\Big(a \int f(ax+b)\,dx = \int u' f(u)\,dx = \int f(u)\,du$$

$$= F(u) + c \Big).$$

Del nå med $a \neq 0$

eks $\int 3 \sin 2\pi(x+1)\,dx$

$u = 2\pi \cdot x + 2\pi \qquad u' = 2\pi$

$$\int \frac{3}{2\pi} \cdot \overbrace{2\pi}^{u'} \sin(u)\,dx$$

$$= \frac{3}{2\pi} \int u' \sin u\,dx$$

$$= \frac{3}{2\pi} \int \sin u\,du = \frac{3}{2\pi}(-\cos u) + c$$

$$= \frac{-3}{2\pi} \cos(2\pi(x+1)) + c$$

$$-\quad \int 2x e^{x^2}\, dx \qquad \text{La } u = x^2$$
$$u' = 2x$$

$$= \int u' e^u \, dx$$

$$= \int e^u \, du$$

$$= e^u + c$$

$$= \underline{e^{x^2} + c}$$

sjekker svaret: $(e^{x^2} + c)' = (e^{x^2})'$

bruker kjerneregelen med $u = x^2$

$$(e^{x^2})' = (e^u)' \cdot u' = e^u \cdot 2x$$
$$= 2x e^{x^2} \quad \checkmark$$

$$\int x^3 e^{-x^4} dx = \frac{-1}{4} e^{-x^4} + c$$

$u = -x^4$, $u' = -4x^3$ så $x^3 = \frac{u'}{-4}$

$$\int x^3 e^{-x^4} dx = \int \frac{u'}{-4} \cdot e^u \, dx$$

$$= \frac{-1}{4} \int u' e^u du = \frac{-1}{4} \int e^u du$$

$$= \frac{-1}{4}(e^u) + c$$

$$\int x^3 e^{-x^4} dx = \underline{\frac{-1}{4} e^{-x^4} + c}$$

$\int \cot x \, dx$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

Prøver ~~med~~ substitusjon.

Kan integralet skrives på formen

$\int u' f(u) dx$?

$u = \sin x, \quad u' = \cos x$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{u'}{u} dx$$

$$= \int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u} du$$

$$= \ln|u| + c = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \cot x \, dx = \underline{\ln|\sin x| + c}$$