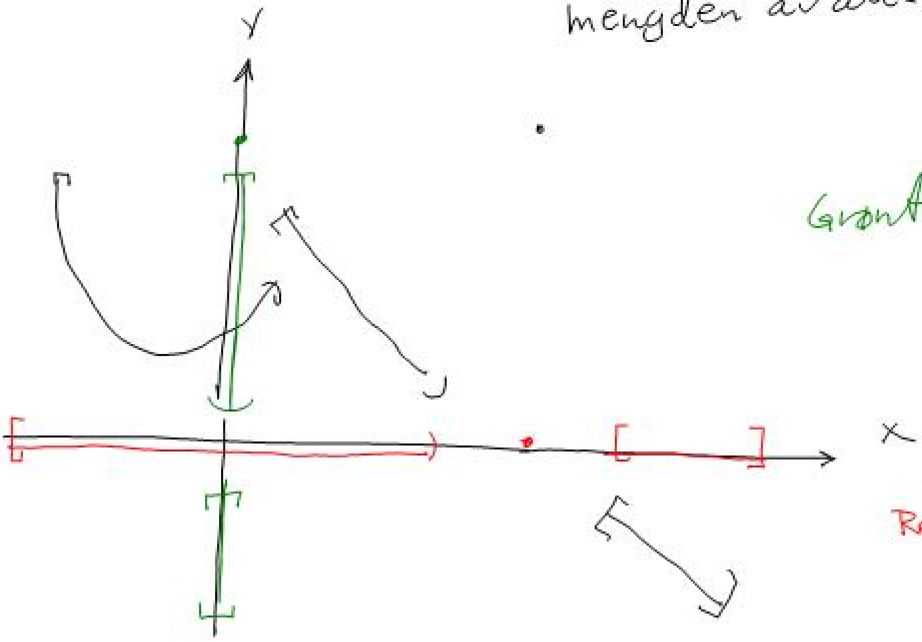
19 mars 2009

Invers funksjoner

La f være en funksjon med definisjonsmengde D_f. Verdimengden til f er

$$V_f = \{ f(x) \text{ for } x \in D_f \}$$

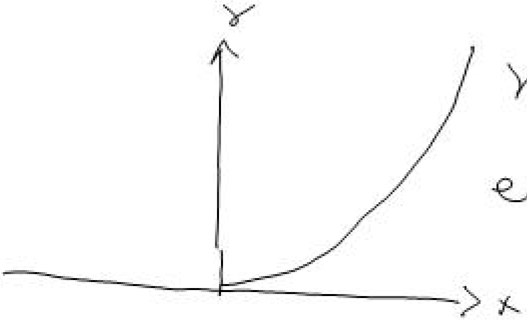
mengden av alle funksjonsverdier til f, D_f.



Grønt : verdimengde V_f

Rødt : definisjonsmengden D_f

Vi sier at en funksjon f med def. mengde D_f er injektiv (også kalt 1-1, en-til-en) hvis $f(x_1) = f(x_2)$ impliserer at $x_1 = x_2$ for alle x_1 og x_2 i D_f.

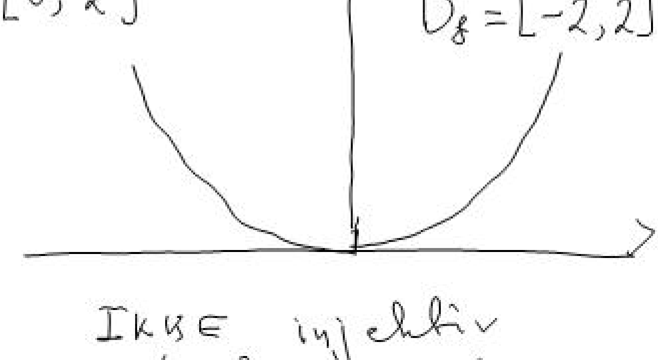


$Y = x^2$ $D_f = [0, 2]$

er injektiv

$Y = x^2$

$D_f = [-2, 2]$



IKKE injektiv

$(-1)^2 = 1 = 1^2$

* Ekte økende og ekte avtagende funksjoner er injektive

* $y = f(x) = x^3$ injektiv.
  $D_f = \mathbb{R}$

Hvis $f(x)$ med def. mengde D_f er injektiv så finnes det akkurat en $x \in D_f$ for hver $y \in V_f$ slik at $f(x) = y$.

Dette gir en funksjon fra V_f til D_f som kalles inversfunksjonen til f.

Den skrives som $f^{-1}(y) = x$

$$D_{f^{-1}} = V_f$$

$$V_{f^{-1}} = D_f$$

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y$$

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

Inversfunksjoner kalles også omvendtfunksjoner.

Merk $\quad f^{-1}(y)$ må ikke forveksles med

$$(f(y))^{-1} = \frac{1}{f(y)} \quad !$$

Gitt en injektiv funksjon $f(x)$, D_f.

Hvordan kan vi finne $f^{-1}(y)$

I blant kan man løse for x i

likningen $\quad y = f(x) \qquad (y = x^3)$

Andre ganger blir inversfunksjonen en

ny fundamental funksjon.

Eks $\quad * \quad y = f(x) = x \qquad D_f = \mathbb{R}$

da er $\quad x = f^{-1}(y) = y$

$* \quad y = ax + b \qquad a \neq 0 \qquad x \in \mathbb{R}$

Injektiv funksjon. $\qquad (D_f = \mathbb{R})$

Løser for x : $\qquad y = ax + b$

$$\frac{y-b}{a} = \frac{\cancel{a}x}{\cancel{a}} = x$$

$$x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a} = f^{-1}(y)$$

så $\quad f^{-1}(y) = \underline{\frac{1}{a}y - \frac{b}{a}}$

* $f(x) = x^3$ $\quad D_f = \mathbb{R}$ $\quad V_f = \mathbb{R}$

ekte økende funksjon, injektiv

$$y = x^3$$

$$\sqrt[3]{y} = x$$

Invers funksjonen til $f(x)$ er

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} = y^{1/3}$$

* $f(x) = e^x$ $\quad D_f = \mathbb{R}$ $\quad V_f = (0, \infty)$

$f(x)$ er en strengt (ekte) økende (voksende) funksjon på D_f. Så $f(x)$ er injektiv.

Så $f(x)$ har en invers funksjon.

Invers funksjonen til $f(x) = e^x$ er

$f^{-1}(y) = \ln y$. $\quad D_{f^{-1}} = (0, \infty)$

$V_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

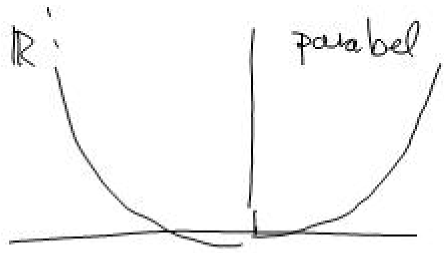
Hvis $f(x), D_f$ ikke er injektiv, hvordan kan vi finne en invers funksjon?

En mulighet er å avgrense definisjonsmengden D_f slik at $f(x), D_f^*$ ← (ny def.-mengde) er injektiv. Det krever at vi gjør et valg.

Det er viktig med konvensjoner for slike valg!

Eksempler $\quad f(x) = x^2 \quad D_f = \mathbb{R}$

ikke injektiv

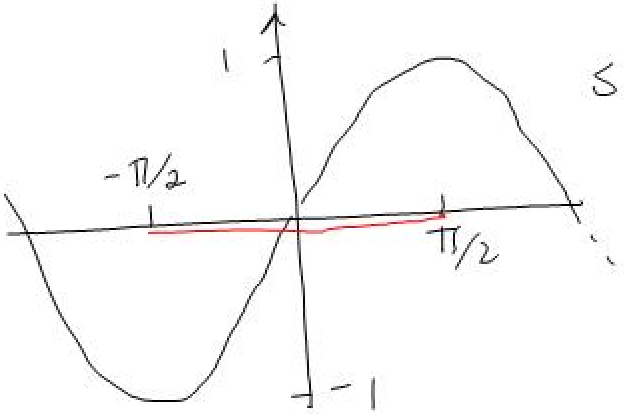


$f(x) = x^2$ avgrenset til $D_f^* = [0, \infty)$ er injektiv.

- Inversfunksjonen til $f(x) = x^2$ på $[0, \infty)$ er $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

- Vi finne også avgrenset D_f til $(-\infty, 0]$.

Da blir $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$.



sin x , $D_f = \mathbb{R}$
er ikke injektiv

$\sin x = \sin(x + 2\pi)$

$\sin x = \sin(\pi - x)$

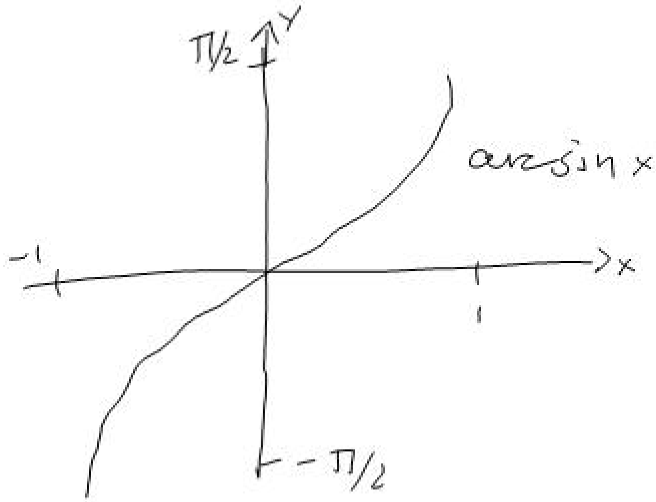
sin x avgrenset til $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ er injektiv,
så den har en invers funksjon.

Invers funksjonen skrives $\sin^{-1}(y)$ eller
$\arcsin(y)$

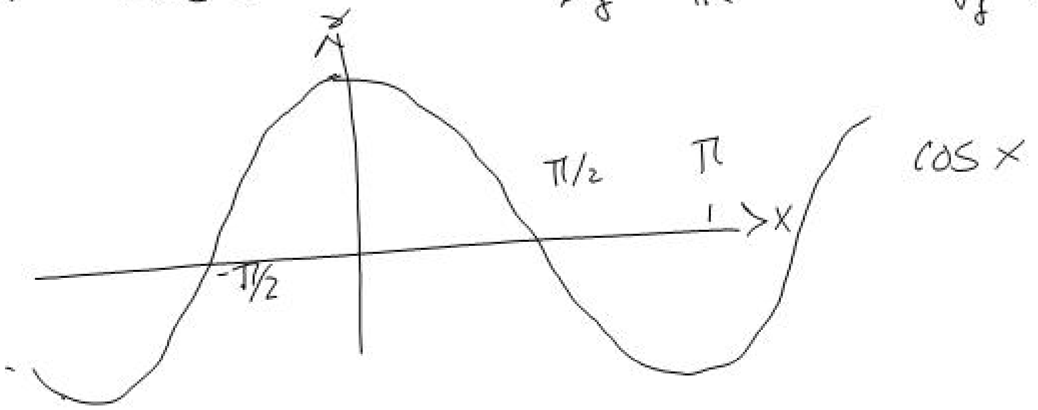
definisjonsmengden

$D_{\arcsin} = [-1, 1]$

$V_{\arcsin} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
verdimengden



$f(x) = \cos x \qquad D_f = \mathbb{R} \qquad V_f = [-1, 1]$

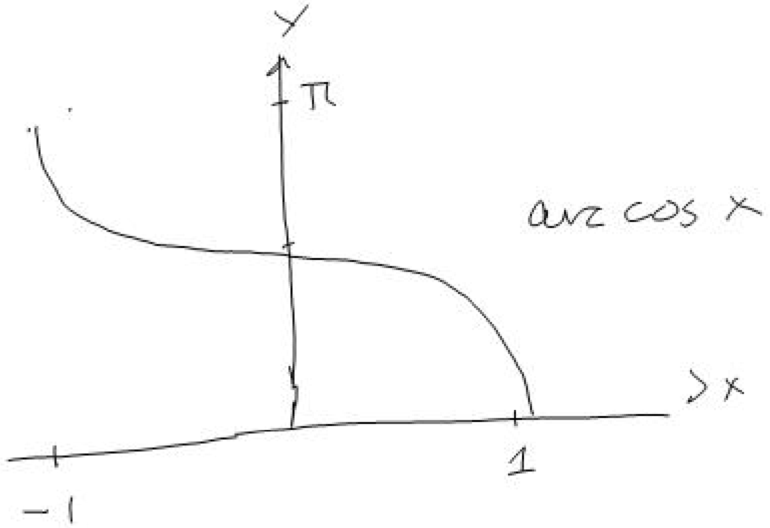


cos x avgrenset til $[0, \pi]$ er injektiv

Invers funksjonen skrives $\cos^{-1} y$ eller $\arccos(y)$

$D_{\arccos} = [-1, 1]$

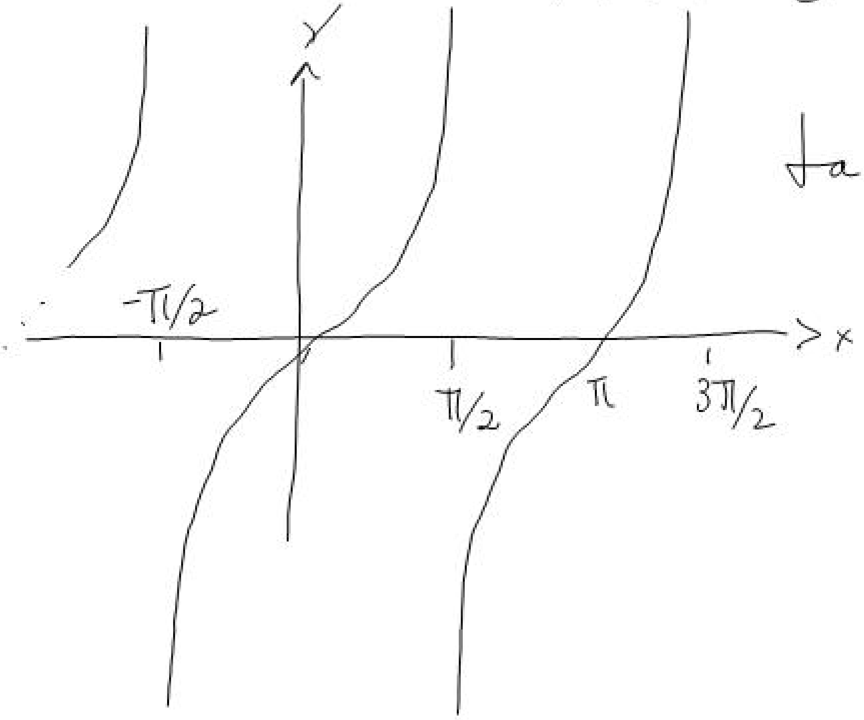
$V_{\arccos} = [0, \pi]$



$\tan x$ definert for alle x bortsett fra $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n$

n heltall.

Verdimengden til $\tan x$ er $\mathbb{R}$.

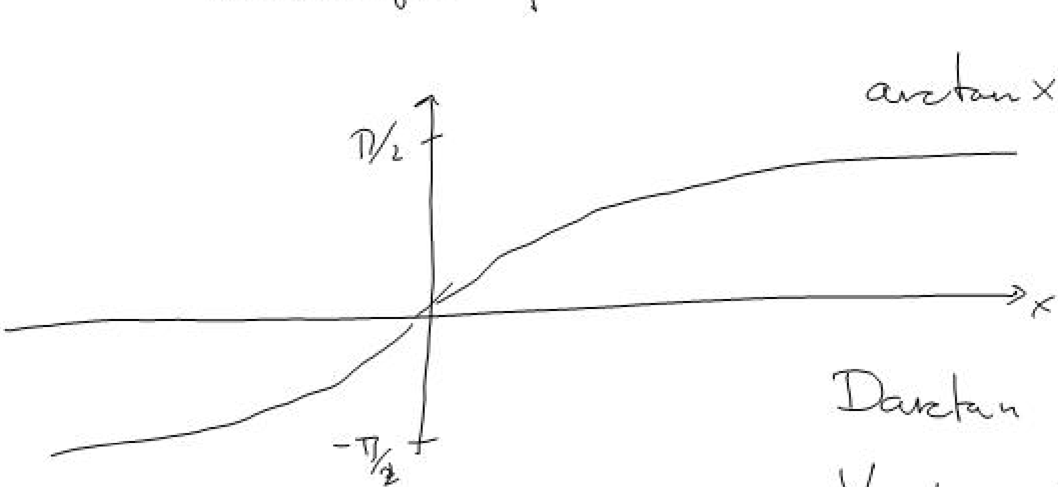


$\tan x$ ikke injektiv

$\tan x$ avgrenset til $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

er en injektiv funksjon.

Inversfunksjonen skrives $\tan^{-1} y$ eller $\arctan y$



$D_{\arctan} = \mathbb{R}$

$V_{\arctan} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Grafen til f^{-1} er det samme som grafen til f reflektert rundt linja $y = x$. (Bytter om på x og y-akse)

Grafen til $f(x)$ består av punkter $(x, f(x))$ for $x \in D_f$

Grafen til $f^{-1}(x)$ består av punkter $(x, f^{-1}(x))$ for $x \in D_{f^{-1}} = V_f$

$= (f(z), z)$ for $z \in V_{f^{-1}} = D_f$

Et punkt (a, b) reflektert om aksen $y = x$ er (b, a).