11.6 Drøfting av logaritmefunksjoner

$f(x) = x^2 \cdot \ln x \qquad x > 0$

Nullpunkt

f'

Bunnpunkt

Vendepunkt

Skisse

$f(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$

Nullpunkt for $f(x)$ er $\underline{x = 1}$ (punktet $(1,0)$)

$f'(x) = (x^2)' \ln x + x^2 \cdot (\ln x)'$ produktregelen

$= 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}$

$f'(x) = x(2\ln x + 1)$

$f'(x) = 0 \iff 2\ln x + 1 = 0 \iff \ln x = \frac{-1}{2}$

$x = e^{\ln x} = e^{-1/2} = (e^{1/2 \cdot (-1)}) = (e^{1/2})^{-1}$

$x = \frac{1}{e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

så $f'(x) = 0$ når $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ (ca. 0.6)

Fortegn til $f'(x)$

$0 \qquad 1/\sqrt{e} \qquad 1$

$f'(x)$ − − − − − + + + + + + +

$f(x)$ har et bunnpunkt (globalt) når

$x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Bunnpunktet er $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \cdot \ln\left(e^{-1/2}\right) \right)$

$\underline{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{-1}{2e} \right)}$

$f''(x) = \left(x(2\ln x + 1) \right)'$ produktregelen

$= (x)'(2\ln x + 1) + x \cdot (2\ln x + 1)'$

$= 1 \cdot (2\ln x + 1) + \cancel{x} \cdot \left(\frac{2}{\cancel{x}}\right)$

$f''(x) = 2\ln x + 1 + 2 = \underline{2\ln x + 3}$

$f''(x) = 0 \iff 2\ln x + 3 = 0 \iff 2\ln x = -3$

$\iff \ln x = \frac{-3}{2} \iff x = e^{\ln x} = e^{-3/2}$. (~ 0.22)

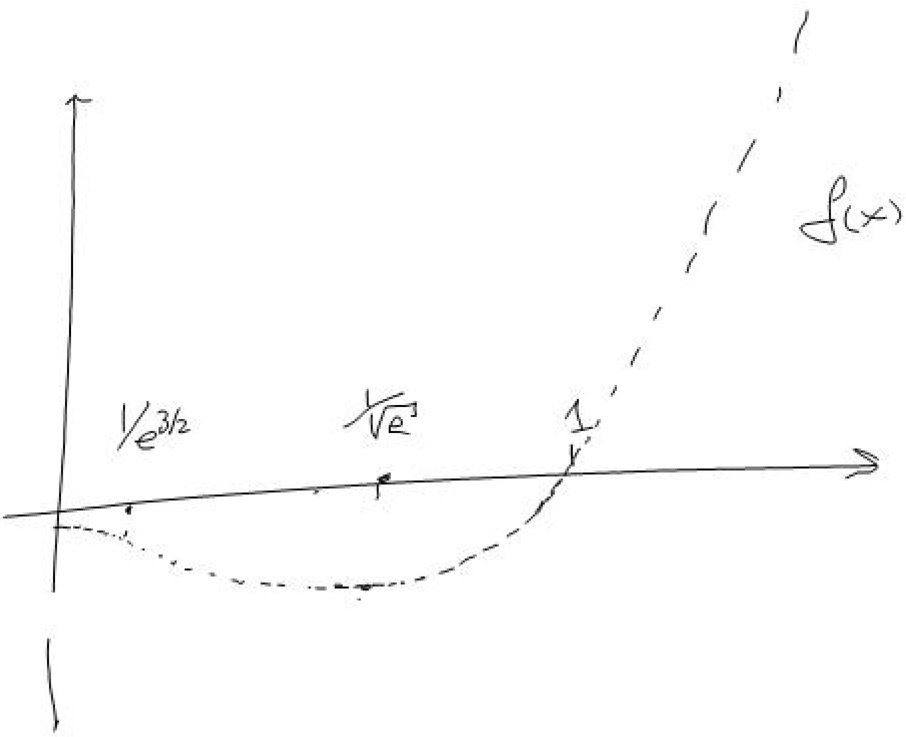
Fortegn til $f''(x)$

$0 \quad 1/e^{3/2} \quad 1$

$- + + + + + + +$

$f(x)$ har ett vendepunkt i $\underline{\left(\frac{1}{e^{3/2}}, \frac{-3}{2e^3} \right)}$

$$\left(\begin{aligned} f(e^{-3/2}) &= (e^{-3/2})^2 \cdot \ln(e^{-3/2}) \\ &= e^{-3} \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{-3}{2e^3} \end{aligned} \right)$$



La $g(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x \qquad x > 0$

topp / bunnpunkt vendepunkt, nullpunkt.

La $f(z) = z^3 - 3z \qquad , \; z = \ln(x)$

$$e^z = e^{\ln x}$$

$$f(z(x)) = g(x)$$

$$e^z = x$$

For å finne nullpunkt, topp- og bunnpunkt for $g(x)$ er det tilstrekkelig å finne dem for den enklere funksjonen $f(z)$ $(x = e^{z})$ og så finne hvilke x-verdier z-verdiene svarer til. Dette fungerer ikke for vendepunkt. Dette forutsetter at $z(x) = \ln x$ er økende (se forklaring på neste side.)

$f(z) = z^3 - 3z$.

$$g(z) = 0$$
$$z(z^2 - 3) = 0$$
$$z = 0 \ , \ z = \pm\sqrt{3}$$

Nullpunktene til $g(x)$ har x-verdi $\underline{e^0 = 1,\ e^{-\sqrt{3}},\ e^{\sqrt{3}}}$

$$f'(z) = 3z^2 - 3 = 3(z^2 - 1)$$
$$f'(z) = 0 \quad \text{når} \quad z = \pm 1$$

Fortegn til $f'(z)$

$$\begin{array}{ccccccc} & -1 & & 0 & & 1 & \\ + + + & | & - - - & | & - - - & | & + + + \end{array}$$

Lokalt toppunkt for $f(z)$ i $(-1, f(-1)) = (-1, 2)$

— bunnpunkt — $(1, f(1)) = (1, -2)$

Så $g(x)$ har lokalt toppunkt i $\underline{(e^{-1}, 2)}$

bunnpunkt i $\underline{(e, -2)}$

$$g(x) = f(z(x))$$

$$g'(x) = f'(z(x)) \cdot z'(x)$$ kjerneregelen

$z'(x) > 0$ siden vi antok at z var en økende funksjon av x (slik som $z(x) = \ln x$).

$$g'(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow f'(z) = 0$$

og $g'(x)$ og $f'(z(x))$ ha samme fortegn.

Dette forklarer fremgangsmåten vi brukte for å finne topp og bunnpunkt for $g(x)$ fra topp og bunnpunkt til $f(z)$.

Andrederivert til $g(x) = f(z(x))$

Som en øvelse kan vi regne ut $g''(x)$ ved å bruke produkt og kjerneregel som følger:

$$g'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$
$$g''(x) = (f'(z) \cdot z'(x))' = (f'(z(x)))' \cdot z'(x) + (f'(z(x))) \cdot (z'(x))'$$

$$g''(x) = f''(z(x)) \cdot (z'(x))^2 + f'(z(x)) \cdot z''(x)$$

Vi bruker dette til å finne $g''(x)$ i eksempelet vårt.

$$f(z) = z^3 - 3z \qquad z(x) = \ln x$$

$$f'(z) = 3z^2 - 3 \qquad z'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f''(z) = 6 \cdot z \qquad z''(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$g''(x) = f''(\ln x) \cdot (z'(x))^2 + f'(\ln x) \cdot z''(x)$$

$$= 6 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x^2} + 3((\ln x)^2 - 1) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot 3\left[2 \ln x + (\ln x)^2 - 1\right]$$

$$g''(x) = 0 \iff (\ln x)^2 + 2\ln x - 1 = 0$$

$$(\ln x + 1)^2 = 2$$

$$\ln x = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$x = e^{\ln x} = e^{-1 \pm \sqrt{2}}$$

Vendepunkt for $g(x)$ når

$x = e^{-1-\sqrt{2}}$ og når

$x = e^{-1+\sqrt{2}}$

Vendepunktene er $\left(e^{-1-\sqrt{2}}, g(e^{-1-\sqrt{2}})\right)$

og $\left(e^{-1+\sqrt{2}}, g(e^{-1+\sqrt{2}})\right)$