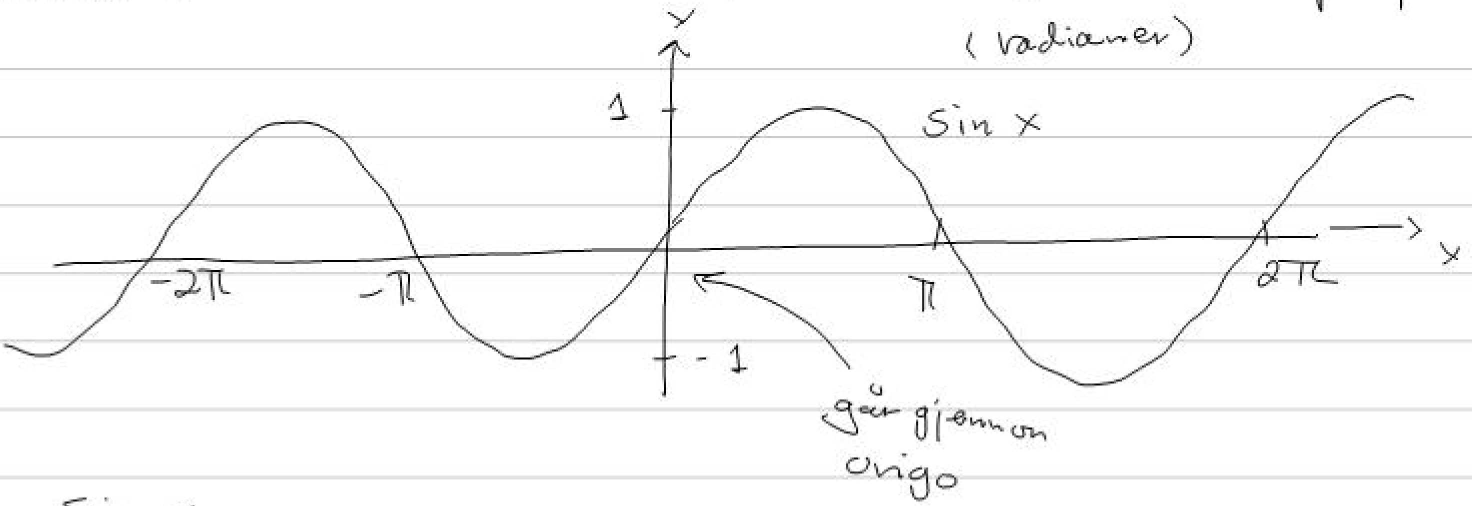
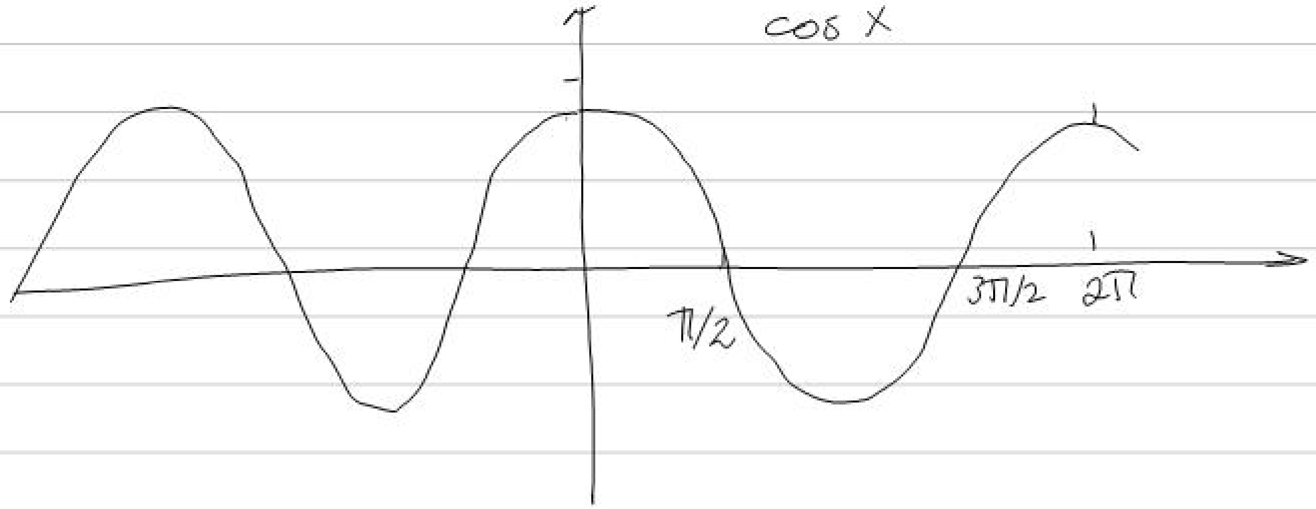
Man. 26.01.09.

10.8 Derivasjon av trigonometriske funksjoner (radianer)



Sin x
Periodisk funksjon med periode 2π

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$$



$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

($\tilde{}$ faseforskyving)

Vi skal vise at $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

og $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

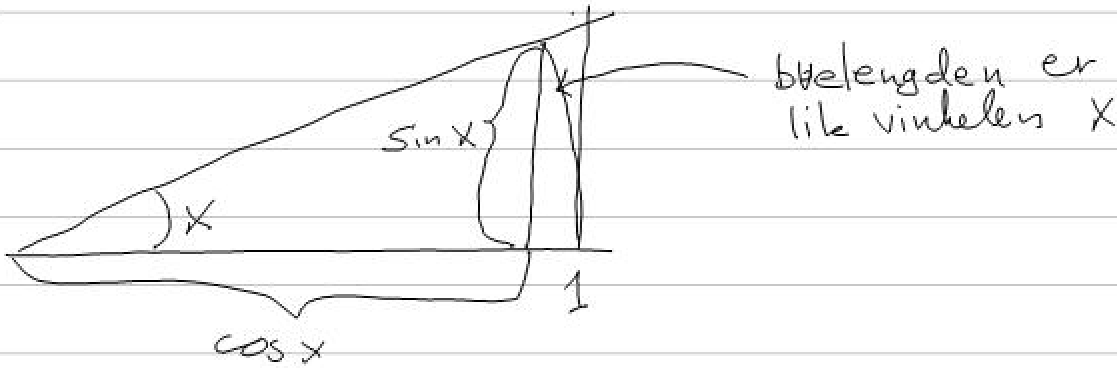
Først finner vi to grenseverdier $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

Merk at $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$

så det er tilstrekkelig å se på $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x}$.

Vi avgrenser oss til $0 < x < \frac{\pi}{4}$



$\sin x <$ buelengden, som er x

$\sin x < x$ siden $x > 0$ så er

$$\frac{\sin x}{x} < 1.$$

Arealet til den store trekanten er $\frac{1}{2} \cdot \underset{\text{bredde}}{1} \cdot \underset{\text{høyde}}{\tan x} = \frac{\tan x}{2}$

Det er større enn arealet til sirkelsegmentet, som er $\frac{x}{2}$ (husk at radiusen er 1)

$$\frac{x}{2} < \frac{1}{2} \tan x \quad \left(= \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$\left(\text{ganger med } \frac{2 \cdot \cos x}{x} \ (>0) \text{ på begge sider}\right)$

Dette gir $\cos x < \frac{\sin x}{x}$.

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad 0 < x \left(< \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$$

siden $\frac{\sin x}{x}$ er skviset mellom $\cos x$ og x når $x \to 0^+$

Så er også $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Vi har nå vist at $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

grenseverdisetningene

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+\cos x}}_{0} = 0$$

siden $\sin x \to 0$ og $1+\cos x \to 2$

Vi har vist at $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

Den deriverte til $\sin x$ er $\cos x$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

Addisjonsformelen: $\sin(x+h) =$

$$\sin x \cdot \cos h + \sin h \cdot \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot (\cos h - 1) + \sin h \cdot \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \cos x$$

$$= \sin x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{0} + \cos x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{1}$$

$$= (\sin x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

Vi kan syne at $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ på tilsvarende måte. Gjør dette selv! Alternativ metode:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad , \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dx}\sin\overbrace{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}^{u} = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

Eksempler

1) $f(x) = \sin(\overbrace{3x+2}^{u(x)})$

$$f'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d \sin u}{du} \cdot \frac{d(3x+2)}{dx}$$

$$= \cos(u) \cdot 3 = \cos(3x+2) \cdot 3$$

$$\underline{f'(x) = 3\cos(3x+2)}$$

2) $f(x) = \frac{1}{\sin x} = (\sin x)^{-1}$ $\quad$ ($x \neq \pi \cdot n$, n heltall)

$f'(x)$

$g(u) = \frac{1}{u} = u^{-1}$ $\quad$ $u(x) = \sin x$

$f(x) = g(u(x)) = g \circ u(x)$

Kjerneregelen: $f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)$

$$g'(u) = (u^{-1})' = -1 \cdot u^{-2} = \frac{-1}{u^2}$$

$$u' = (\sin x)' = \cos x$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} \cdot \cos x = \underline{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}.$$

(standard notasjon:

$\frac{1}{\sin x} = \csc(x)$ $\quad$ cosekant

$\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$ $\quad$ cotangens

$(\csc x)' = -\csc(x) \cdot \cot(x)$.)

3) $f(x) = \cos(\underbrace{x^2 - 3x}_{u(x)})$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d\cos u}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= -\sin(u) \cdot (2x-3)$$

$$= \underline{-(2x-3)\sin(x^2-3x)}$$

4 $f(x) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$

$g(u) = u^2$, $u(x) = \sin x$

$f(x) = g(u(x))$

$g'(u) = 2u$ $u'(x) = \cos x$

$$f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)$$

$$= 2(\sin x) \cdot (\cos x) = \underline{2\sin x \cdot \cos x}.$$

Regn ut $\frac{d}{dx}\left[(\cos x)^2\right]$

$\frac{d}{dx}\left[\cos 2x\right]$

sammenlign svarene med

$\frac{d}{dx} \sin^2 x = 2\sin x \cdot \cos x$

Forklar

5) $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n\right.$
$\left. n \text{ heltall}\right)$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \sin x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{1}}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = (\sec x)^2$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$